This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

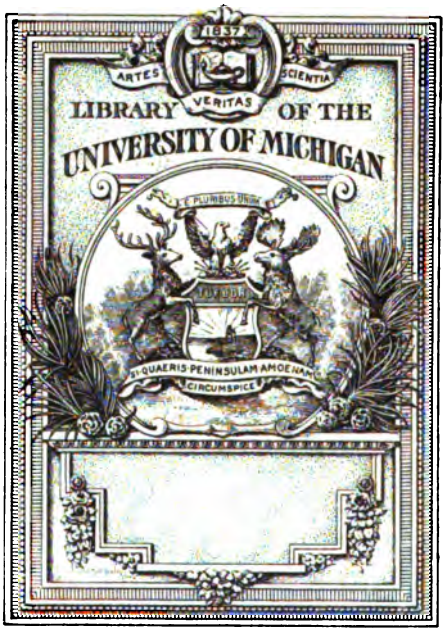
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

AST
O
Q1
34
.5

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

D'ASTRONOMIE THÉORIQUE

Digitized by Google

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

Digitized by Google

TRAITÉ

38151

D'ASTRONOMIE

THÉORIQUE

CONTENANT L'EXPOSITION DU CALCUL DES

PERTURBATIONS PLANÉTAIRES ET LUNAIRES

ET SON APPLICATION A L'EXPLICATION ET A LA FORMATION DES

TABLES ASTRONOMIQUES

Avec une Introduction historique et de nombreux exemples numériques

Ouvrage dédié aux Astronomes,
aux Marins et aux Élèves de l'enseignement supérieur

PAR ABEL SOUCHON

MEMBRE ADJOINT DU BUREAU DES LONGITUDES
ATTACHÉ A LA RÉDACTION DE LA *Connaissance des Temps*

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS

1891

Digitized by Google

Digitized by Google

A LA MÉMOIRE

DE

L'ABBÉ LOUIS STANISLAS AOUST

EN SON VIVANT

Professeur d'Analyse infinitésimale et d'Astronomie
à la Faculté des Sciences de Marseille

Pieux souvenir !

ABEL SOUCHON

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÉFACE

> Il n'est pas nécessaire qu'un même Ouvrage contienne tout ce qu'il était possible d'y mettre, il y en a d'autres; l'important est qu'il contienne des choses utiles, qui ne se trouvent pas ailleurs.
>
> MAXIMILIEN MARIE. — *Histoire des sciences mathématiques et physiques*; Tome I. Préf.

Cet ouvrage, ainsi que le titre l'indique, est consacré au développement et à l'application des Formules, des données et des Théories dont l'ensemble constitue cette branche importante de la Mécanique céleste qu'on appelle le *Calcul des perturbations planétaires et lunaires*.

Nous l'avons divisé en deux parties principales.

La première partie expose, d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires, les principes fondamentaux de la théorie analytique des perturbations, limités comme nous venons de le dire aux planètes et à la Lune. La seconde contient le précis des méthodes et des procédés de calcul employés dans la *Construction des Tables astronomiques*, et, en particulier, dans celle des Tables planétaires.

Digitized by Google

Ces deux parties quoique distinctes se tiennent et se complètent mutuellement.

La seconde partie, qui est à la fois théorique et pratique, constitue sous beaucoup de rapports un ouvrage nouveau. Par la nature des sujets qui y sont traités, elle se rattache au calcul des Éphémérides planétaires et on peut la considérer comme le complément de l'ouvrage que nous avons publié sur cette matière (*a*), ouvrage où nous avons bien essayé d'expliquer la disposition et l'usage des Tables astronomiques, mais sans entrer dans l'examen des diverses questions auxquelles donne lieu leur composition.

Depuis longtemps, pensons-nous, les jeunes Astronomes, les Marins et tous ceux qui s'occupent d'Astronomie théorique ont dû désirer qu'il existât, sur le Calcul des perturbations, un ouvrage dans lequel les principes de cette science fussent exposés sous une forme claire, concise, méthodique et facilement applicable.

Nous croyons être arrivé à réaliser ce désir, à combler cette lacune.

En tout cas, les lecteurs compétents apprécieront, nous n'en doutons pas, les efforts que nous avons faits pour atteindre ce but. A. S.

(*a*) *Traité d'Astronomie pratique*, contenant l'exposition du Calcul des Éphémérides astronomiques et nautiques, d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*. Grand in-8, Paris, 1883.

Digitized by Google

INTRODUCTION HISTORIQUE

PREMIÈRE SECTION

Découverte de la gravitation universelle

I

Du nombre des découvertes qui honorent l'esprit humain il n'en est pas de plus admirable que celle de l'attraction entendue dans le sens newtonien. C'est à cette découverte que nous sommes redevables de l'explication exacte des phénomènes du flux et du reflux de la mer, de la procession des équinoxes, de la nutation de l'axe terrestre, de la diminution de l'obliquité de l'écliptique. C'est à elle que nous devons non seulement une démonstration rigoureuse des lois empiriques de Kepler, mais encore l'explication des diverses anomalies par lesquelles les planètes et les satellites s'écartent de ces lois. C'est par elle enfin que se sont trouvés expliqués et déterminés avec une admirable exactitude le mouvement des nœuds des planètes et de la Lune, celui de leur apsides, la masse des planètes, leur sphéricité, leur aplatissement, en un mot tous les effets résultant de l'attraction mutuelle des corps célestes.

Digitized by Google

La plus ancienne trace que l'on rencontre dans l'histoire de la Science du grand principe qui nous occupe est l'opinion professée par Anaxagore, l'un des successeurs de Thalés dans la direction de l'École ionienne. Ce philosophe célèbre soutenait que tous les corps célestes sont formés d'une matière pesante, à peu près semblable à celle de la Terre ; et lorsqu'on lui demandait comment il arrivait que des corps ainsi constitués pussent demeurer suspendus dans l'espace, il répondait que la cause en était dans leur mouvement circulaire, et que leur chute serait immédiate si ce mouvement venait à cesser (*a*). Cette idée de l'attraction qu'eurent plus tard Démocrite, Epicure, Plutarque et quelques philosophes contemporains de ce dernier, fut partagée au XVIIe siècle par Copernic lui-même. Ce savant attribuait en effet la forme sphérique des corps célestes à la tendance qu'ont leurs parties à se réunir, mais sans cependant étendre cette tendance d'un corps à un autre (*b*). Kepler, doué d'un esprit hardi et synthétique, fut le premier qui eut l'idée d'embrasser dans un système unique tous les mouvements célestes. Ce grand homme sentit bien vite que l'attraction était universelle et réciproque, et qu'elle devait s'étendre d'un corps à un autre. Pour lui « la gravité est une affection corporelle et mutuelle entre les corps, afin de se réunir. Si la Terre et la Lune n'étaient pas retenues dans leurs distances respectives par une force, elles se porteraient l'une vers l'autre, en parcourant pour se joindre des espaces réciproques à leurs masses. Si la Terre cessait d'attirer les eaux de l'océan, elle se porterait sur la Lune, en vertu de la force attractive de cet astre. Cette force qui s'étend jusqu'à la Terre

(*a*) Diogène Laërce, in Anaxag. lib. II.
(*b*). De revol. orb. cœlest., lib. I, cap. 9.

Digitized by Google

y produit les phénomènes du flux et du reflux de la mer. Le corps du Soleil est magnétique; il agit comme un aimant sur les planètes » (*a*). Kepler, on le voit, rapproche ici l'attraction de la force magnétique, conception qui était dans les idées régnantes du temps. Fermat, dans ses *Varia opera Math.*, fait le même rapprochement, mais il assimile la gravitation à la pesanteur. « L'opinion la plus accréditée, dit ce grand géomètre, est que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même qui tombe; d'autres cependant pensent que la chute des corps procède de l'attraction d'un autre corps qui attire celui qui descend comme la Terre; il y a une troisième opinion qui n'est pas hors de vraisemblance, c'est que la pesanteur est une attraction mutuelle entre les corps, causée par un désir naturel qu'ont ces corps de s'unir ensemble, comme il arrive au fer et à l'aimant. »

Après Kepler, Descartes essaya également de ramener tous les phénomènes célestes à ne dépendre que des lois de la Mécanique. Suivant lui, le Soleil et chaque étoile sont le centre d'autant de tourbillons de matière subtile autour desquels circulent d'autres corps plus petits. Notre système solaire, par exemple, est un tourbillon formé de cette matière inerte, terne, au centre duquel se trouve placé le Soleil. Le tourbillon du Soleil, en circulant autour de la Terre, entraîne les planètes avec leurs tourbillons et ceux-ci à leur tour entraînent les satellites. Descartes adopte ici, comme on le voit, l'idée fausse qu'avait avant lui Tycho-Brahé de faire mouvoir le Soleil et l'ensemble des planètes autour de la Lune. Cette opinion était loin sans doute d'être partagée par les philosophes contemporains de

(*a*) Ast nov. in introd.

Digitized by Google

Descartes, mais, au XVIIe siècle, il fallait la professer pour ne pas s'exposer à des persécutions pareilles à celles qu'eut à subir plus tard Galilée. On ne peut douter cependant, en lisant le livre des *Principes de la philosophie*, que Descartes ne fût très sincère en adoptant lui même l'idée de l'immobilité de la Terre; car voici à peu près comment il s'exprime dans la troisième partie de cet ouvrage qui traite du *monde visible*. « Après avoir ôté, dit-il, par ces raisonnements tous les scrupules qu'on peut avoir touchant le mouvement de la Terre, nous pensons que la matière subtile du ciel où sont les planètes tourne sans cesse circulairement ainsi qu'un tourbillon qui aurait le Soleil à son centre, et que ses parties qui sont proches du Soleil se meuvent plus vite que celles qui sont éloignées jusqu'à une certaine distance, et que toutes les planètes au nombre desquelles nous mettrons désormais la Terre demeurent toujours suspendues entre les mêmes parties de cette matière céleste ou subtile. Car, de même que dans les détours des rivières où l'eau se replie en elle même et tournoyant ainsi fait des cercles, si quelques corps fort légers flottent parmi cette eau, on peut voir qu'elle les emporte et les fait mouvoir circulairement avec soi; et même parmi ces corps on peut remarquer qu'il y en a souvent quelques-uns qui tournent autour de leur propre centre, et que ceux qui sont plus proches du centre du tourbillon qui les contient achèvent leur tour plus tôt que ceux qui en sont plus éloignés; et enfin que bien que ces tourbillons d'eau affectent toujours de tourner circulairement, ils ne décrivent presque jamais des cercles entièrement parfaits, et qu'ainsi toutes les parties de la circonférence ne sont pas également distantes du centre ». Descartes pense donc que les mêmes choses peuvent se dire du mouve-

Digitized by Google

ment des planètes et que cela seul suffit pour expliquer tous leurs phénomènes.

Quant aux mouvements terrestres, que Descartes examine dans la quatrième partie de ses *Principes*, c'est toujours par les mêmes hypothèses qu'il les explique. Pour lui la pesanteur résulte de la légèreté même de cette matière inerte, indéfiniment divisible, qu'il nomme matière céleste ou subtile. Si les corps pèsent vers le centre de la Terre, c'est qu'ils sont dépourvus de force centrifuge, et s'ils tombent, c'est que d'autres corps s'élèvent et prennent leur place.

Cette idée de Descartes de faire dépendre des mêmes lois mécaniques les grands mouvements des cieux et de la Terre, était à son époque une conception neuve et hardie qui dut paraître séduisante à beaucoup d'esprits. Cependant l'incohérence du système cartésien, l'invraisemblance de ses suppositions ne tardèrent pas à le faire rejeter. On prouva que la matière subtile était une chimère et que ses tourbillons étaient en contradiction avec les lois établies et les faits observés, puisqu'ils ne s'accordaient pas avec les comètes dont les mouvements sont dirigés dans tous les sens. Et ainsi fut ruinée la doctrine du philosophe français, comme l'avaient été celles des anciens astronomes de l'École d'Alexandrie.

II

On voit encore l'attraction mutuelle des corps célestes indiquée dans les écrits de Galilée, Roberval, Borelli, Hévelius, mais personne, avant Newton, n'en avait parlé avec plus d'exactitude ni de clarté que Robert Hooke, dans son *Essai pour prouver le mouvement de la terre*, paru à Londres en

Digitized by Google

1674 (*a*). On peut même dire qu'il faillit enlever à Newton la gloire de la plus brillante de ses découvertes. Voici, en effet, dans quels termes précis s'exprime Hooke à la page 27 de l'ouvrage que nous venons de citer : « J'expliquerai, dit-il, un système du monde différent à bien des égards de tous les autres et qui est fondé sur les trois propositions que voici : 1° tous les corps célestes, sans en excepter aucun, ont non seulement une attraction ou une gravitation sur leur propre centre, par laquelle ils attirent leurs parties, mais encore ils s'attirent mutuellement les uns les autres dans la sphère de leur activité ; 2° tous les corps qui ont reçu un mouvement simple et direct continueraient à se mouvoir en ligne droite, si quelque force effective ne venait sans cesse les en détourner et les contraindre à décrire un cercle, une ellipse ou quelqu'autre courbe plus compliquée ; 3° l'attraction est d'autant plus puissante que les corps attirés et attirants sont plus près l'un de l'autre ». Quant à la loi suivant laquelle cette force diminue à mesure que la distance augmente, Hooke avoue qu'il ne l'a point encore vérifiée.

Cette loi, qui s'était soustraite aux expériences de Hooke, il était réservé à Newton de nous la faire connaître. C'est en 1665-1666 que, retiré à Woolstrop, sa ville natale, Newton tourna ses méditations vers la nature de la pesanteur et ses effets. De ce que la force qui produit la chute des corps, c'est-à-dire la gravité, ne diminue pas sensiblement lorsqu'on s'élève de la surface de la Terre au sommet des plus hautes montagnes, Newton en conjectura qu'il pouvait bien se faire que cette force s'étendît jusqu'à la Lune et que ce fût préci-

(*a*) An attempt to prove the motion of the Earth from observations, 1674, in-4.

Digitized by Google

sément elle qui retint cet astre dans son orbite. Cette conjecture émise, il s'agissait de la vérifier, et pour cela, il fallait parvenir à déterminer la quantité de cette diminution ou la loi suivant laquelle décroît cette force à la distance de la Lune. Newton songea alors que si la Lune était retenue autour de la Terre par la pesanteur terrestre, les planètes, dans leur mouvement autour du Soleil, devaient être retenues dans leurs orbites par une puissance semblable, émanant de cet astre ; et, en comparant les périodes des différentes planètes avec leurs distances au Soleil, il trouva que si une force semblable à celle qui s'exerce à la surface de la Terre retenait les planètes dans leurs orbites, cette force devait diminuer en raison inverse du carré de la distance.

Parvenu ainsi à la connaissance de la loi de la pesanteur des planètes vers le Soleil, Newton s'empressa d'en faire l'application à la Lune. Il supposa donc que la pesanteur s'étendait jusqu'à cet astre en s'affaiblissant dans le rapport qu'il venait de trouver, puis, afin de vérifier son hypothèse, il chercha à déterminer la quantité dont la Lune tombe vers la Terre dans un court intervalle de temps, ou celle dont cet astre s'écarte de la tangente qu'il suivrait s'il n'était pas sollicité par la Terre. Cette quantité qui n'est autre chose, comme il est aisé de s'en convaincre, que le sinus verse de l'arc décrit par la Lune dans le même intervalle de temps, s'exprime en fonction du rayon de la Terre. Pour parvenir à la solution désirée, il fallait donc avant tout connaître la valeur de ce rayon. Mais à l'époque où Newton entreprit ce calcul, la longueur du degré terrestre était loin d'être connue avec exactitude. Newton la supposa, avec les navigateurs et les géographes de son temps, égale à 60 milles anglais ou 297,151 pieds

Digitized by Google

de Paris, quantité trop faible de $\frac{1}{6}$ environ. Newton ne trouva donc pas le résultat qu'il attendait pour vérifier sa conjecture, et soupçonnant que quelque cause inconnue se joignait à la pesanteur pour en modifier, dans le cas de la Lune, la loi générale, il abandonna ou du moins, il ajourna ses recherches sur ce sujet. Les ayant reprises vers le mois de juin 1682, et s'étant cette fois servi du degré terrestre récemment déterminé en France par Picard, il put constater que la Lune était retenue dans son orbite par le seul pouvoir de la gravité et que cette force, dont l'intensité allait précisément en diminuant dans le rapport qu'il avait autrefois assigné, était bien de même nature que celle qui agit à la surface de la Terre.

Cependant Newton pouvait encore douter de la parfaite analogie des deux forces, car la loi de la pesanteur que le mouvement des planètes indiquait n'avait été obtenue qu'en supposant les orbes de ces corps circulaires et concentriques au Soleil. Il était donc nécessaire de s'assurer si cette loi de la gravitation était générale et si elle pouvait s'étendre au cas des orbites supposées elliptiques. Un problème sur les projectiles que lui avait proposé Hooke, dès 1679, et dont nous aurons bientôt à reparler, l'avait déjà mis sur la voie de cette recherche ; car Newton, par un calcul rigoureux, avait prouvé que tout corps qui se meut sous l'influence d'une force attractive émanant d'un centre et variant proportionnellement au carré de la distance doit nécessairement décrire une ellipse ou en général une section conique, dont l'un des foyers est précisément au centre de cette force (*a*). En rapprochant ces ré-

(*a*) Jean Barnoulli démontra plus tard que la proposition inverse est également vraie, c'est-à-dire que la force centrale étant supposée en raison inverse du carré de la distance, l'orbite est nécessairement une section conique. *Œuvres de J. Barnoulli*, t. I, p. 469.

Digitized by Google

sultats des lois assignées par Kepler aux orbites planétaires, Newton put donc en conclure que les planètes sont retenues dans leurs orbites elliptiques par une force de même nature que celle qui agit à la surface de la Terre et variant réciproquement au carré de la distance au Soleil. L'identité entre ces deux grandes forces de la matière, celle qui s'exerce sur la Terre et celle qui réside dans tout l'univers, était donc un fait rigoureusement démontré, et à Newton revenait désormais le grand mérite d'avoir réuni dans une même loi les phénomènes qui dépendent de la chute des corps terrestres et ceux que font naître les mouvements des corps célestes. Cette loi universelle, Newton l'énonça en disant que toutes les parties de la matière gravitent les unes vers les autres avec une force proportionnelle à leurs masses et réciproque au carré de leurs distances mutuelles; et c'est du développement des conséquences de cette loi admirable que ce grand géomètre composa la première édition de ses *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, le plus beau monument que le génie de l'homme ait élevé aux sciences exactes.

Ce livre célèbre et sublime, qui contenait l'ébauche de toutes les grandes découvertes astronomiques, n'eut pas à son apparition tout le succès qu'il méritait, et plus de cinquante ans s'écoulèrent avant que le principe de la gravitation universelle fût admis comme une vérité incontestée. La Physique cartésienne qui régnait alors en souveraine dans toutes les Écoles du continent n'avait pas peu contribué à diviser sur ce point les esprits même les plus éclairés; et l'on vit longtemps après la publication du Livre des *Principes* trois grands géomètres, Huygens, Jean Bernoulli et Leibniz se refuser à admettre le système newtonien et même le combattre. Huygens,

Digitized by Google

préoccupé surtout des idées hypothétiques qu'il s'était faites sur la cause de la pesanteur, n'admettait la gravitation newtonienne que pour les astres et la rejeta de molécule à molécule. Jean Bernoulli, qui avait été grand partisan du système cartésien, soutenait que l'attraction ne pouvait être en même temps proportionnelle à la masse du corps attiré et suivre le rapport inverse du carré des distances. Quant à Leibniz, soit par esprit de système, soit peut-être aussi par rivalité, il se posa hardiment en adversaire de la doctrine newtonienne et publia même une dissertation dans laquelle il cherchait à démontrer autrement les vérités que Newton avait établies dans son grand Ouvrage. La réaction en faveur du nouveau système finit cependant par s'opérer et nous devons dire qu'elle fut aussi complète que possible.

III

L'admiration que nous inspire la brillante et féconde découverte de Newton ne doit pas nous rendre ingrat envers ses contemporains et nous empêcher de leur rendre la justice qui leur est due. Hooke, dont les recherches se trouvent liées par une coïncidence singulière à toutes les grandes découvertes de Newton, mérite d'être nommé un des premiers. Par ses réflexions métaphysiques autant que par ses expériences ingénieuses, cet homme vraiment extraordinaire, que l'amour de la Science inspirait, a jeté une vive lumière sur presque toutes les branches de la Physique céleste ; et si,

Digitized by Google

dans la question qui nous occupe, il n'a pu parvenir à la loi mathématique de l'attraction, il faut du moins lui rendre cette justice, que ses travaux n'ont point été inutiles au progrès des sciences, et qu'ils n'ont pu que guider Newton dans la voie des recherches qui devaient le conduire à sa découverte.

Il paraît bien difficile de reporter à une date précise les premières recherches de Hooke sur la gravitation universelle. Ce qui est certain, c'est que dès 1666 ce physicien avait très bien reconnu que les mouvements planétaires doivent résulter d'une force d'impulsion primitive, combinée avec la force attractive du Soleil. L'expérience qu'il fit devant la Société royale de Londres pour le prouver, est intéressante à plus d'un titre et mérite d'être rapportée. Voici donc comment Hooke s'y prit pour présenter sa découverte. Il suspendit au plafond de la salle un pendule formé d'un très long fil, à l'extrémité duquel était attachée une boule en bois destinée à représenter la figure d'une planète. En écartant ce pendule de la position verticale et l'abandonnant ensuite à l'effet de la pesanteur, la boule devait nécessairement décrire un arc de cercle dans le plan vertical de l'oscillation. Or Hooke remarqua que si, tout en laissant agir ainsi ce pendule, on lui imprimait un mouvement latéral, c'est-à-dire perpendiculaire au plan de l'écart, la boule, au lieu de décrire un arc de trajectoire plane, se mouvait horizontalement, et traçait autour de la ligne verticale une ellipse ou une série d'ellipses qui étaient d'autant plus ouvertes ou moins excentriques que l'impulsion latérale était plus considérable. Dans le but de représenter, toujours à l'aide du même mécanisme, le mouvement réel de translation de la Terre et de la Lune autour du

Digitized by Google

Soleil, Hooke fit la seconde expérience que voici. Il attacha au moyen d'un second fil une boule plus petite au fil vertical de la première, puis, après avoir mis ce second pendule en oscillation autour de ce dernier fil, il imprima à la première boule un mouvement latéral comme dans la première expérience. Il vit alors que ni l'une ni l'autre des deux boules ne décrivait plus une ellipse et que c'était leur centre commun de gravité qui semblait parcourir cette courbe. Hooke en conclut donc que, dans le système formé par la Terre et la Lune, ce n'est pas le centre de la Terre qui parcourt une ellipse, mais bien le centre commun de gravité de ces deux corps.

Ces expériences étaient assurément intéressantes, en ce qu'elles offraient un exemple de la composition du mouvement curviligne en deux forces, l'une impulsive et l'autre centrale, mais elles étaient loin, comme on le pense bien, de donner une image, même approchée, des mouvements célestes. Il y avait, en effet, entre les ellipses ainsi obtenues et les ellipses planétaires, cette différence capitale qué, dans les premières, la force centrale est constamment dirigée vers le centre de l'ellipse, tandis que, dans les ellipses planétaires, cette force réside au foyer même de la courbe et est réciproque au carré de la distance à ce point.

Hooke sentit très bien cette distinction; il comprenait que toute la difficulté du problème consiste dans la détermination de la force qui retient les corps célestes dans leurs orbites, d'après la forme même de ces orbites; mais, n'étant pas assez versé dans l'étude des mathématiques, et les mathématiques elles-mêmes n'étant pas à son époque assez avancées, il ne put jamais parvenir à la solution du problème énoncé dans des termes aussi généraux. Cette admirable découverte, qui

Digitized by Google

nous a dévoilé le secret du système du monde, exigeait le secours d'une analyse transcendante et nouvelle, et c'est au génie de Newton qu'elle était réservée.

C'est dans le but de suppléer à l'insuffisance de l'analyse à cette époque, et à ses propres moyens, que Hooke avait entrepris d'étudier la nature de la force attractive par des expériences directes, et qu'il avait imaginé les ingénieux appareils que nous venons de décrire. Quelques années plus tard, en 1674, il rassembla ses idées sur ce sujet et publia son *Essai pour prouver le mouvement de la terre*, dont nous avons présenté un extrait au paragraphe qui précède. Sans vouloir amoindrir en quoi que ce soit l'importance des propositions qui y sont contenues, nous ferons remarquer toutefois que cet ouvrage est bien moins un exposé de faits nouveaux qu'une généralisation des principes déjà entrevus par Kepler, Copernic, Galilée et Descartes. Hooke, en publiant son système, a eu cependant un très grand mérite, c'est d'avoir coordonné tous ces principes et de les avoir présentés comme formant la base du vrai système du monde. A la page 28 de l'Opuscule que nous venons de citer, Hooke dit en effet : « Cette idée étant suivie comme elle mérite de l'être, ne peut manquer d'être très utile aux astronomes pour réduire tous les mouvements célestes à une certaine règle, ce qui, je crois, ne pourra jamais s'obtenir autrement. Ceux qui connaissent la théorie des oscillations du pendule et du mouvement circulaire comprendront aisément sur quels fondements repose le principe général que j'énonce, et ils sauront trouver dans la nature les moyens d'en établir le véritable caractère physique. Je ne veux ici que l'indiquer à ceux qui ont le temps et la faculté de suivre plus loin cette recherche et qui réuniront la science du calcul au

Digitized by Google

talent de l'observation, souhaitant ardemment que ce principe soit développé, et ayant moi-même en mains d'autres recherches que je désire terminer d'abord, ce qui m'empêche de m'en occuper pour le moment ; mais j'ose promettre à celui qui réussira dans cette entreprise qu'il trouvera dans ce principe la cause déterminante des plus grands mouvements que l'univers nous offre, et que son développement complet sera la véritable perfection de l'astronomie. »

Bien que ce ne soit qu'en 1678 que Hooke ait commencé à parler du carré des distances, dans un livre intitulé *Cometa* il y a tout lieu de croire que cette loi lui était connue lorsqu'il publia son Essai sur le mouvement de la Terre. Ce qui est hors de doute, c'est que, vers la fin de l'année 1679, ses idées sur ce point étaient définitivement arrêtées, et qu'il se servait de la loi présumée pour rectifier la solution donnée par Newton d'un problème concernant le mouvement des projectiles. Ce problème, que l'on peut énoncer ainsi : « déterminer la nature de la courbe décrite par un corps tombant d'une très grande hauteur », avait été proposé par les membres de la Société royale, dans le but d'étudier l'influence du mouvement de rotation de la Terre et d'en bien constater la réalité. Newton, qui supposait la chute opérée dans un milieu résistant et qui du reste avait adopté l'hypothèse d'une intensité de pesanteur constante, avait annoncé que la courbe serait une spirale. Hooke répondit avec raison que la courbe n'était pas une spirale, mais que ce serait une ellipse dans le vide et une courbe ovoïde excentrique si la chute s'opérait dans un milieu résistant comme l'air. Ce fut là, comme nous l'avons dit (§ I, p. 8), l'occasion qui amena Newton à rechercher si le mouvement des planètes pouvait résulter d'une gravitation en

Digitized by Google

raison inverse du carré de la distance, et à confirmer par le calcul l'exactitude de cette grande loi.

On voit donc que, dès 1678, Hooke s'était formé une idée très positive et très vraie de la loi du décroissement de la force attractive ; mais déjà et auparavant d'illustres savants avaient eu connaissance de cette loi et l'avaient à différentes époques énoncée plus ou moins clairement. Kepler est le premier qui l'ait soupçonnée, mais il la rejeta bientôt pour adopter celle d'une variation en raison inverse de la simple distance. Bouilleau, qui doutait cependant de l'attraction, reprochait à Kepler d'avoir adopté cette dernière loi; il disait formellement, en 1645 : « si l'attraction existait, elle suivrait la loi du carré des distances ». Bouilleau était un savant très estimable, mais qu'un faux esprit de système avait malheureusement égaré en plus d'une circonstance. Wren, mathématicien anglais, bien connu par l'universalité de ses talents, passait aussi pour avoir connu dès 1671 la loi exacte de l'attraction, mais il ne semble pas qu'il ait établi cette loi autrement que Bouilleau, c'est-à-dire par des considérations purement métaphysiques. Halley, vers le commencement de 1684, fit faire un pas de plus à la question. En s'appuyant sur la troisième loi de Kepler et se servant des théorèmes qu'Huygens avait donnés dès 1672 sur les forces centrifuges (*a*), il reconnut que la force qui retient les planètes dans leurs orbites supposées circulaires était réciproque au carré de chaque distance au Soleil, précisément comme Newton l'avait trouvé en 1666, lorsqu'il entreprit son premier calcul sur la pesanteur de la Lune. Quant à l'idée de l'extension du

(*a*) *Horologium oscillatorium, in fol.*

Digitized by Google

principe de gravité à tous les corps célestes, elle appartient incontestablement à Borelli qui en a donné la première application dans son ouvrage sur les satellites de Jupiter, publié à Florence en 1666 (*a*). Il est vrai que Borelli y fait décroître la gravité dans le simple rapport de la distance au Soleil ; mais il faut bien se rappeler qu'à cette époque la loi de ce décroissement était mal connue, et que Borelli n'était pas en possession des théorèmes de Huygens qui auraient pu l'y conduire. Ces théorèmes n'ont été donnés, en effet, que six ans plus tard.

IV

Après cet exposé rapide, mais complet du progrès et du développement des idées sur l'attraction, nous réduirons à quelques mots ce qui nous reste à dire sur la question de priorité que souleva Hooke à l'apparition du livre des *Principes de la philosophie naturelle.*

C'est sur les instances de Halley que Newton se décida à publier ce livre admirable, et c'est le docteur Vincent qui fut chargé de le présenter en son nom à la Société royale de Londres.

Cette présentation eut lieu le 26 avril 1686.

Les acclamations enthousiastes qui l'accueillirent indisposèrent Hooke, qui réclama obstinément sa part dans la priorité de la découverte, prétendant y avoir un droit égal à celui de l'auteur. Ses récriminations à cet égard furent même si violentes que Halley crut devoir les soumettre à Newton,

(*a*) *Theoricæ Medicæorum planetarum ex causis physicis deductæ.*

Digitized by Google

dans la lettre de remerciements qu'il lui adressa au nom de la Société royale. « M. Hooke, dit-il, attend de vous que vous reconnaissiez ses droits de priorité dans la préface de l'Ouvrage » (*a*).

La réponse de Newton, en latin, est datée du 26 juin 1686; mais, comme elle est fort longue, nous la réduirons à ce qu'elle a d'essentiellement intéressant et documentaire pour le point de droit qui nous occupe (*b*).

Newton commence par déclarer à Halley qu'il est intimement persuadé que le chevalier Wren, auquel il rendit visite vers 1671, était déjà, à cette époque, en possession de la loi du carré des distances et que, par conséquent, Hooke, qui n'a commencé à en parler qu'en 1678 dans son livre intitulé *cometa*, ne peut être considéré que comme le dernier des trois qui l'ait connue. Newton affirme ensuite n'avoir jamais étendu cette loi de la surface au centre de la terre, et fait remarquer à Halley que, depuis plus de quinze ans, il a composé un écrit où l'attraction des planètes vers le Soleil se trouve calculée d'après la loi rigoureuse de la gravitation. Enfin il termine sa lettre en accusant Hooke de s'être approprié l'hypothèse même de Borelli, et de l'avoir

(*a*) Cette lettre se trouve dans *The history of royal society of London*, publiée par Birch. Voici textuellement le passage qui se rapporte aux revendications de Hooke : « There is one thing more, that I ought to inform you of, viz. that M. Hooke has some pretensions upon the invention of the rule of decrease of gravity being reciprocally as the squares of the distances from the centre. He says you had the notion from him, though he owns the demonstration of the curves generated thereby to be wholly your own. How much of this is so, you know best ; as likewise what you have to do in this matter. Only M. Hooke seems to expect you should make some mention of him the preface, which it is possible you may see reason to prefix.

(*b*) *Biographia britannica, art. Hooke p.* 2659.

Digitized by Google

complétée comme sienne en s'inspirant des idées émises sur le même sujet par ses prédécesseurs (*a*).

Toutes les tentatives que Halley et le chevalier Wren firent auprès de Hooke pour l'engager à publier sa découverte demeurèrent infructueuses. Hooke affirmait positivement qu'en partant de la loi du carré il était parvenu à expliquer toutes les circonstances des mouvements célestes, mais lorsqu'on lui demandait d'en fournir une preuve, il répondait qu'il était bien aise de la tenir encore secrète, afin de donner aux géomètres le temps de s'exercer sur une question si importante. Plus tard, il prétendit qu'il avait édifié sur le principe de l'attraction une théorie tout-à-fait nouvelle d'un système du monde, mais que ce système ayant besoin d'être complété en plusieurs points, il ne jugeait point à propos de le publier. Cependant, dès le mois d'août 1684, Newton avait remis à Halley la démonstration tant désirée de la loi de la gravitation et cette démonstration avait été consignée dans les registres de la Société royale ; aussi lorsque, à l'occasion de la présentation du livre des *Principes*, Hooke renouvela ses prétentions, l'avis unanime des membres fut que, rien de tout ce qu'avançait Hooke n'ayant été inséré dans les registres de la Société ou rendu public par l'impression, Newton devait être considéré comme le premier et unique inventeur. Hooke ne put jamais fournir la démonstration qu'on lui demandait et Newton resta seul maître de la découverte.

(*a*) Newton voulut bien cependant proclamer plus tard l'indépendance des idées de Hooke, Wren et Halley dans un scholie qui fait suite au coroll. VI de la proposition IV du livre III des *Principes*. Après avoir énoncé dans cette proposition la loi du carré des distances, Newton ajoute : « Le cas de ce corollaire VI est celui des corps célestes comme Hooke, Wren et Halley l'ont chacun conclu des observations. »

Digitized by Google

Il paraît que ce grand homme, fatigué des attaques dont il avait été assailli, voulait, au moment de l'impression, supprimer le troisième livre de ses *Principes* et ne conserver que les deux premiers avec ce titre : *De motu corporum ;* mais Halley parvint heureusement à le faire changer de résolution. Ce troisième livre qui a pour titre *De mundi systemate* renferme les applications au système du monde et peut être regardé comme le couronnement de l'œuvre. La beauté du génie de Newton y paraît plus que dans les deux premiers, à cause de la variété et de l'importance des sujets qui y sont traités. C'est dans cette troisième partie, en effet, que ce grand géomètre entreprend d'expliquer le mouvement des planètes, les inégalités de la Lune, le flux et le reflux de la mer, etc, problèmes dont la solution offrait alors les plus grandes difficultés et que Newton résout avec une rare élégance par la méthode synthétique des anciens géomètres.

L'ouvrage des *Principes* eut du vivant de l'auteur trois éditions. La première parut à Londres en 1687 sous le titre de *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, in-4°, et fut imprimée aux frais de la Société royale. La deuxième fut publiée à Cambridge, en 1713, avec des additions considérables, et la troisième à Londres, en 1726, par les soins du docteur H. Pemberton, l'ami intime et le confident de Newton. A ces deux éditions il faut encore ajouter celle de 1739-1742 que publièrent à Genève les Pères Le Seur et Jacquier, minimes, et la traduction française de Madame du Chastelet, parue à Paris en 1759. Cette édition en 2 volumes in-4° contient un excellent commentaire attribué à Clairaut et est très estimée.

Digitized by Google

DEUXIÈME SECTION

Analyse du problème fondamental des perturbations

I

La question qui consiste à déterminer les actions réciproques que les corps célestes exercent les uns sur les autres, en vertu de leur attraction mutuelle, dépend, en dernière analyse du problème suivant, célèbre dans l'histoire de la Science sous le nom de *Problème des trois corps.* Etant données les masses de trois corps ainsi que leurs positions et leur vitesses (celles-ci en grandeur et en direction), trouver la courbe que ces corps doivent décrire en vertu de leur attraction supposée proportionnelle à leurs masses et en raison inverse du carré des distances.

Ce problème, qui n'a été résolu jusqu'ici que par approximation, a excité les efforts des plus grands géomètres. Ebauché d'abord par Newton dans ses recherches sur le système du monde, il fut repris un peu plus tard par Clairaut d'Alembert et Euler qui en donnèrent presqu'en même temps une solution générale. Depuis, ce problème a fait l'objet des méditations d'un grand nombre de géomètres, et de très remarquables travaux se sont produits qui en ont avancé la solution dans le cas général. Cependant cette solution est loin d'être complète.

Digitized by Google

Des douze intégrations qu'elle exige, deux seulement, indépendamment de celles qui résultent des principes des aires et des forces vives, ont pu être obtenues directement ; il en reste donc encore six à faire. Dans l'état d'imperfection où est encore l'analyse, on doit désespérer d'y parvenir, et c'est ce que les géomètres qui se sont occupés de la question ont très bien compris, car depuis longtemps ils semblent n'avoir eu d'autre but que de perfectionner les méthodes d'approximation, afin de les rendre applicables au cas du mouvement de la Lune attirée par le Soleil et par la Terre. Nous verrons dans la suite de cet ouvrage les efforts qu'ils ont faits pour y parvenir et les résultats qu'ils ont obtenus.

C'est dans la onzième Section du Livre I des *Principes* que Newton a renfermé les propositions relatives au Problème des trois corps et qu'il a analysé les divers effets qui résultent de leur attraction mutuelle.

Dans la proposition LXVI, ce grand géomètre entreprend de prouver que « si trois corps de masses inégales s'attirent mutuellement en raison inverse du carré des distances, et si l'on considère d'abord les attractions des deux plus petits vers le troisième (autour du quel ils sont supposés tourner), le plus intérieur des deux petits corps décrira autour de ce corps central, comme foyer, des aires qui approcheront davantage d'être proportionnelles au temps et une orbite plus sensiblement elliptique, si le grand corps est soumis aux attractions des deux autres que s'il ne l'était pas ou qu'il le fût suivant une loi différente de celle supposée. »

Pour le démontrer, Newton suppose d'abord que les deux plus petits corps tournent autour du plus grand dans le même plan. Il décompose alors l'attraction du corps extérieur vers

Digitized by Google

l'autre petit corps en deux composantes, l'une dirigée suivant une parallèle à la ligne qui va du corps intermédiaire au corps central, et l'autre suivant la droite qui joint le corps central au corps le plus extérieur. La première de ces deux forces s'ajoute à celle qui provient de l'attraction mutuelle du corps intermédiaire et du corps central, et ne change en rien la loi des aires ; mais, comme elle n'est pas rigoureusement proportionnelle au carré des distances, elle altère la loi de la force suivant laquelle le corps intermédiaire est attiré vers le corps central, et, par suite, déforme l'orbite décrite par ce corps. Quant à la seconde force, celle qui est dirigée suivant la droite qui va du corps central au corps extétérieur, elle change à la fois la proportionnalité des aires et la forme de l'orbite décrite, et ceci pour deux raisons. La première c'est que cette force n'est pas dirigée du corps intermédiaire au corps central, et la seconde c'est qu'elle n'est pas réciproquement proportionnelle à la distance qui sépare ces deux corps. En général, on peut dire que c'est par la différence entre l'attraction du corps central vers le corps extérieur et la seconde composante que se produit la double altération dont nous parlons ; et l'on voit qu'elle est d'autant plus faible que cette différence d'attraction est plus petite. La même conclusion se tire du cas où les trois corps ne sont pas situés dans le même plan.

Les mêmes lois d'attraction étant posées, Newton démontre encore (dans les deux propositions suivantes) que le corps extérieur, supposé plus petit que le corps central, décrit autour du centre de gravité des deux autres, comme foyer, des aires qui sont plus près d'être proportionnelles au temps et une orbite plus approchante de la forme elliptique qu'autour

Digitized by Google

du corps central, et que cette proposition a lieu plus exactement encore si le corps central est attiré par les deux autres que s'il ne l'était pas ou qu'il le fût suivant une loi différente. Enfin dans la proposition LXIX, ce grand géomètre, en considérant l'action que chacun des corps d'un système exerce successivement sur tous les autres, parvient à cette conclusion remarquable, que les forces absolues de deux corps l'un sur l'autre sont entre elles comme leurs masses; d'où il est naturellement conduit à regarder l'attraction comme la tendance qu'ont toutes les molécules de la matière à se rapprocher les unes des autres, quelle que soit au reste la cause physique ou métaphysique de cette tendance.

Les conséquences qui découlent de ces théorèmes, et en particulier du premier, sont nombreuses. Newton les examine dans les corollaires qui suivent et rend compte avec une grande simplicité des changements que l'action mutuelle des trois corps introduit dans la forme, la grandeur et la position de l'orbite troublée, d'après les différentes situations que ces corps peuvent occuper dans l'espace. Tous ces résultats sont obtenus à l'aide d'une synthèse rigoureuse, et c'est vraiment admirable de voir avec quel ordre et quel enchaînement Newton les établit dans cette partie de son ouvrage.

II

Un corps qui tourne autour d'un autre corps doit, en vertu des lois newtoniennes, décrire une section conique. L'observation et le calcul ont montré que cette courbe, dans le cas

Digitized by Google

des planètes et des satellites, était une ellipse ayant pour foyer le centre de l'autre corps et obéissant en toute rigueur aux lois de Kepler. Mais, si à l'action de ce corps on joint celle d'un troisième corps placé dans un plan différent, on rencontre des difficultés qu'il a été impossible jusqu'ici de surmonter.

On peut facilement et de plusieurs manières former les équations différentielles qui expriment les conditions du mouvement des trois corps; on peut même, comme nous le verrons, en réduire notablement le nombre et en abaisser l'ordre; mais, là où apparait la difficulté, c'est lorsqu'on veut intégrer toutes ces équations en termes finis, c'est-à-dire rigoureusement. Les méthodes que l'on possède dans l'état actuel de l'analyse sont insuffisantes pour effectuer cette intégration, et l'on est obligé d'avoir recours à des approximations qui sont surtout fondées sur cette supposition, que la masse de l'un des corps attirants est beaucoup plus grande que celle des deux autres. C'est ce qui a lieu en particulier lorsqu'on applique la solution du Problème des trois corps au mouvement de la Lune troublé par le Soleil et par la Terre.

Cette difficulté d'intégrer, Clairaut l'avait rencontrée au début de ses recherches sur le Problème des trois corps, et elle lui parut si considérable, qu'il ne chercha d'abord qu'à simplifier les équations du problème sans s'occuper de leur résolution. Il y revint cependant un peu plus tard et présenta, à l'occasion d'un prix proposé par le comte de Lauraguais, de nouvelles remarques sur le Problème des trois corps, qui furent communiquées à l'Académie des Sciences dans la séance du 23 juin 1759. Dans l'opuscule qui les contient, et qui a pour

Digitized by Google

titre *Réflexions sur le problème des trois corps* (*a*), etc., Clairaut parvient avec la plus grande facilité aux six équations différentielles du second ordre qui expriment les conditions du problème, et, par des transformations très simples, il tire ensuite de son système quatre équations différentielles du premier ordre dont deux s'intègrent entièrement. Ces deux équations, comme le remarque Clairaut, ne sont qu'une traduction du théorème de Newton sur le mouvement du centre de gravité; les deux autres résultent des principes de la conservation des aires et des forces vives. Clairaut ne considère dans son travail que le cas où les trois corps se meuvent dans le même plan; mais il fait observer que sa solution peut s'appliquer sans difficulté au cas où le mouvement s'effectue dans des plans différents.

En joignant aux quatre premières intégrales dont nous venons de parler deux quelconques des équations primitives, on obtient un système de six équations différentielles qui renferment la solution du Problème des trois corps, pris dans toute sa généralité. Clairaut le remarque à la fin de son analyse, mais ne voyant toujours que la difficulté de parvenir à une solution rigoureuse, il ajoute : *Intègre maintenant qui pourra !* Et jusqu'ici personne n'a pu le faire.

En 1772, Lagrange envoya à l'Académie des Sciences un nouvel essai sur le Problème des trois corps qui remporta le prix proposé par la classe des sciences mathématiques. La méthode que ce grand géomètre y expose est très belle et fort importante au point de vue analytique. Elle consiste à n'em-

(*a*) Ce Mémoire a été inséré, en août 1759, dans le *Journal des savants*. On trouve aussi dans le même journal, nos de décembre 1760 et janvier 1761, les premiers essais de Clairaut sur le Problème des trois corps, tels qu'ils avaient été d'abord présentés à l'Académie des Sciences dans le courant de l'année 1747.

Digitized by Google

ployer, dans la détermination de l'orbite de chacun des corps A, B, C, d'autres éléments que leurs distances mutuelles, c'est-à-dire à considérer à chaque instant le triangle variable formé par ces trois corps. Envisagé avec cette généralité, le Problème des trois corps comporte alors deux recherches distinctes. Il faut d'abord trouver les équations différentielles de chaque côté du triangle mobile autour du centre de gravité des trois corps; et, en supposant ces distances déterminées en fonction du temps, il faut ensuite en déduire les orbites relatives de ces corps par rapport à un plan fixe quelconque. Lagrange rapporte le mouvement des trois corps à des coordonnées rectangulaires et parvient très simplement aux équations différentielles du second ordre qui expriment les mouvements relatifs des corps B et C autour du corps A, et celles qui déterminent les orbites relatives du corps C autour de B. Ces équations sont au nombre de neuf et se transforment facilement les unes dans les autres à cause de leur forme symétrique. Lagrange en déduit avec facilité les quatre intégrales premières que fournissent le principe des aires et celui des forces vives, puis il réduit les six premières équations primitives qui renferment la solution complète du problème à deux équations différentielles du second ordre et à une du troisième. Ces trois équations sont moins simples que les primitives, car elles renferment chacune deux signes d'intégration; mais elles ne contiennent aucun radical, ce qui est, comme le remarque Lagrange, un avantage précieux dans ces sortes de problèmes.

Les trois côtés du triangle variable ABC étant ainsi déterminés en fonction du temps, on peut connaître à chaque instant la position relative que les trois corps occupent dans l'espace;

Digitized by Google

mais, pour avoir l'orbite même de ces corps, il faut déterminer les coordonnées qui fixent leurs positions.

Lagrange se livre à cette recherche dans la seconde partie de sa solution et parvient à onze équations seulement entre les six coordonnées des corps A et B et leurs différentielles ; il en conclut que la détermination de ces inconnues ne peut se faire par les règles ordinaires de l'élimination, et montre comment on peut y arriver à l'aide d'une intégration. Ce grand géomètre parvient ainsi aux formules qui servent à déterminer les orbites des corps B et C autour du corps A par rapport à un plan fixe passant par ce dernier corps, et prouve que, parmi tous les plans que l'on peut faire passer pas le corps A, il y en a un qui doit être choisi de préférence, comme étant le plus propre à simplifier le mouvement des deux autres ; il montre ensuite comment les mêmes formules peuvent servir à déterminer les positions mutuelles des orbites de B et C.

III

La solution du Problème des trois corps donnée par Lagrange est, comme nous venons de le voir, des plus remarquables ; cependant, en réduisant les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, à deux équations du second ordre et à une du troisième, ce grand géomètre n'a fait qu'ajouter une intégrale nouvelle à celles déjà connues des aires et des forces vives. Dans son système, l'achèvement de la solution dépend donc encore de *sept* intégrations.

Digitized by Google

Jacobi, qui s'est occupé après Lagrange du Problème des trois corps, a réduit les six équations différentielles primitives à cinq équations du premier ordre et à une seule du second ; il a donc fait, comme Lagrange, cinq intégrations (*a*), mais son analyse présente ce caractère remarquable de simplicité, que, dans les équations différentielles du problème, les dérivées secondes des coordonnées prises par rapport au temps sont toujours représentées par les dérivées partielles d'une même fonction (la fonction des forces), comme cela a lieu dans l'état primitif.

La transformation que Jacobi fait subir aux équations du problème pour arriver à ce résultat repose sur les considérations suivantes. Soient m_1 $(x_1\ y_1\ z_1)$, m_2 $(x_2\ y_2\ z_2)$, m_3 $(x_3\ y_3\ z_3)$ les neufs coordonnées respectives des trois corps rapportées à leur centre commun de gravité, centre que l'on peut supposer en repos. Une propriété bien connue de ce centre donne entre ces trois systèmes de coordonnées trois équations linéaires qui permettent d'exprimer ces neufs coordonnées en fonction de six variables nouvelles q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 et d'un pareil nombre de constantes, ces dernieres devant satisfaire seulement à deux relations linéaires de même forme que les précédentes. Par la substitution des relations qui lient les coordonnées anciennes aux nouvelles, on peut alors réduire la force vive du système proposé à celle d'un système de deux corps fictifs ayant μ (q_1, q_3, q_5), μ_1 (q_2, q_4, q_6) pour coordonnées; et, par les formules connues de Lagrange, on en déduit aisément les

(*a*) En réalité, Jacobi a fait *six* intégrations, car on peut facilement s'assurer que son système différentiel est réductible à un système de six équations du premier ordre. Cette remarque curieuse a été faite en 1863 par un savant géomètre anglais M. A. Cayley. Voyez les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences. T. LVI.

Digitized by Google

équations différentielles du mouvement sous la forme simple que nous avons énoncée. Quant aux deux corps fictifs μ, μ_1, ils ne s'écartent des corps véritables que de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices; en sorte que, dans une première approximation, on peut regarder leur mouvement autour du centre de gravité des trois corps comme elliptique.

Ayant ainsi réduit le Problème des trois corps à un problème du mouvement de deux corps, Jacobi démontre : 1° que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps fictifs reste constamment dans un plan fixe, c'est le *plan invariable* du système ; 2° que les inclinaisons des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites, regardées comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres. Il est donc naturellement conduit à prendre pour variables de la question : 1° les inclinaisons des deux orbites au plan invariable ; 2° les deux rayons vecteurs ; 3° leurs distances au nœud ascendant commun des plans des deux orbites ou les angles qu'ils forment avec l'intersection commune de ces plans ; et 4° enfin l'angle que forme cette intersection avec une droite fixe située dans le plan invariable ou la longitude du nœud ascendant des deux orbites. Jacobi remarque en terminant que ce dernier angle disparaît entièrement de son système différentiel et se détermine après l'intégration par une simple quadrature. Dans ce système, l'élimination des nœuds se trouve donc complètement effectuée.

Digitized by Google

IV

Dans un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, M. J. Bertrand est parvenu à réduire la question à l'intégration de six équations, toutes du premier ordre, comme dans la forme définitive du système de Jacobi. Sa méthode, purement analytique, s'applique à l'intégration des équations de forme Hamiltonienne, et consiste dans la recherche des intégrales qui, combinées avec celles des aires, donnent à l'équation de Poisson la forme illusoire $0 = 0$. On sait que cette circonstance peut avoir lieu de deux manières différentes : 1° lorsque la combinaison (α,β), au lieu d'être une fonction des variables p_1, p_n, q_1, q_n, t, est égale à zéro ou à une constante numérique; et 2° lorsque cette quantité est fonction des deux intégrales (α) et (β) de sorte que la relation $(\alpha,\beta) =$ *constante* donne une intégrale qui rentre dans celles déjà connues (α) et (β). Par exemple, quand l'une d'elles (α) est celle des forces vives et que l'autre (β) ne contient pas le temps, on a identiquement $(\alpha,\beta) = 0$ et aucune intégrale nouvelle ne s'ajoute à celles (α) et (β) dont on est parti. Ces divers cas d'exception doivent sans doute limiter beaucoup l'emploi de la méthode d'intégration que fournit le théorème de Poisson (*a*). Mais, dans les cas mêmes où cette méthode

(*a*) Considérons les équations du mouvement mises sous la forme Hamiltonienne

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{dH}{dq_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{dH}{dp_i},$$

H étant une fonction des variables $p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n, t$.

Ces équations étant au nombre de $2n$, leur intégration fera connaître $2n$

Digitized by Google

échoue, les intégrales (α) et (β) jouissent de propriétés particulières dont on peut souvent tirer parti pour achever ou du moins pour pousser plus loin l'intégration des équations proposées. C'est ce que M. Bertrand a fait voir dans son Mémoire, en rattachant l'un à l'autre les deux cas dans lesquels le théorème de Poisson donne des résultats illusoires, et en montrant qu'il suffit pour les étudier de chercher les intégrales qui conduisent à des résultats identiques. Il a été ainsi conduit à énoncer le principe suivant, sur lequel est fondée sa méthode. Si (α) et (β) sont deux intégrales d'un même problème de mécanique, et si, en les

intégrales renfermant $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$; et si l'on suppose ces intégrales résolues par rapport aux constantes, on aura $2n$ équations de la forme

$$\alpha_i = \varphi(q_1 \ldots q_n \,;\, p_1 \ldots p_n) \qquad \beta_i = \psi(q_1 \ldots q_n \,;\, p_1 \ldots p_n).$$

Cela posé, le théorème de Poisson consiste en ce que, si (α) et (β) sont deux intégrales quelconques de ce système, la quantité

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\beta}{dq_i} \right)$$

que l'on représente par (α, β), conserve une valeur constante pendant toute la durée du mouvement.

Cette belle propriété des intégrales (α) et (β), que Poisson a fait connaître dans son premier Mémoire sur la variation des constantes arbitraires, fournit une méthode très remarquable d'intégration mise en lumière par Jacobi. En effet, (α, β) étant une fonction de $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$, si on l'égale à une constante arbitraire, on aura en général une troisième intégrale du problème proposé ; cette troisième intégrale pourra d'ailleurs, par sa combinaison avec l'une des deux premières, en produire une quatrième ; celle-ci une cinquième et ainsi de suite jusqu'à la complète résolution du problème. Malheureusement, les cas dans lesquels la combinaison des deux premières intégrales ne fournit aucun résultat nouveau sont excessivement nombreux, ainsi que M. Bertrand l'a montré ; mais il est très remarquable que la recherche de ces cas ait pu conduire à une nouvelle méthode d'intégration.

Digitized by Google

combinant par la méthode de Poisson, on trouve une troisième intégrale $(\alpha,\beta) = \gamma$, puis une quatrième $(\alpha,\gamma) = \xi$ etc., en sorte que $\xi = F(\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta)$, il existe toujours une certaine intégrale de forme $\xi = f(\alpha,\beta \ldots \eta)$ qui, combinée avec (α), donne identiquement $(\alpha, \xi) = 1$.

Edmond Bour, en partant des formules de M. Bertrand, est arrivé, dans un Mémoire inséré au XXXVIe cahier du *Journal de l'école polytechnique*, à huit variables fonctions de celles de M. Bertrand, et il a donné les équations générales du mouvement sous la forme canonique que nous avons considérée plus haut. La valeur de H qui figure dans ces équations a une forme particulièrement remarquable, en ce sens qu'elle est la différence $H_1 - \Omega$ de deux fontions dont l'une, H_1, est précisément ce que deviendrait H si le mouvement s'effectuait dans un plan, et dont l'autre, Ω, désigne une fonction perturbatrice égale au produit d'une constante dépendante des aires par la masse des moments d'inertie des deux corps mobiles autour d'un certain axe, et divisé par le carré de la surface du triangle formé par les trois corps. Par ce travail de Bour il est donc démontré que, pour résoudre le Problème des trois corps dans le cas général, il suffit d'intégrer le cas où le mouvement de ces corps a lieu dans un plan et d'avoir ensuite égard à une fonction perturbatrice Ω définie comme nous venons de le dire.

Cette liaison que Bour a établie entre le problème à deux dimensions et le problème à trois dimensions résulte, nous devons le dire, d'une analyse assez compliquée. Dans ces derniers temps, un habile géomètre italien, M. Brioschi, auquel la science est redevable de plusieurs travaux importants, est parvenu à un système de huit équations différentielles de

Digitized by Google

forme canonique, et il a retrouvé très simplement les variables employées par Bour dans sa transformation. Mais son analyse, comme celle de Jacobi, fait dépendre implicitement la solution du problème de sept intégrations.

V

Après avoir donné dans son *Essai* les équations différentielles qui renferment la solution complète du Problème des trois corps, Lagrange en a déduit la solution rigoureuse dans quelques cas particuliers qui, bien que n'ayant pas lieu dans le système du monde, peuvent cependant être employés quand les coordonnées de ces corps et leurs vitesses initiales remplissent certaines conditions déterminées.

Pour que ces solutions particulières puissent avoir lieu, il faut, comme Lagrange l'a démontré, que les distances entre les trois corps soient constantes ou gardent au moins entre elles un rapport constant. C'est ce qui ne peut arriver que dans deux cas distincts, savoir : lorsque ces distances sont toutes égales entre elles, en sorte que les trois corps forment constamment un triangle équilatéral, et lorsque l'une d'elles est égale à la somme ou à la différence des deux autres, auquel cas les trois corps sont toujours rangés sur une même ligne droite. Dans ces deux cas, chacun des trois corps décrit autour des deux autres ou autour du centre commun de gravité, des courbes semblables et semblablement placées, et la loi du mouvement de chaque corps est la même que pour un point matériel attiré vers un centre fixe. On tombe, en effet, sur les solutions particulières dont nous parlons lorsque, trois

Digitized by Google

points matériels étant supposés s'attirer proportionnellement à la masse et en raison inverse du carré de la distance, on cherche les conditions nécessaires pour que le mouvement de deux quelconques de ces points, autour du troisième ou autour du centre de gravité, soit de même nature que celui de deux points s'attirant seuls suivant la même loi.

Il est assez singulier que, jusqu'à ces derniers temps, aucun géomètre n'ait senti la nécessité d'examiner si le système formé par ces deux solutions était stable par lui-même. Laplace, qui a fait connaitre, au livre X de la *Mécanique céleste*, les conditions spéciales que doivent remplir les masses, les distances et les vitesses initiales des trois corps, pour que le mouvement puisse exister dans la nature, ne s'est pas demandé si ce mouvement était permanent; et, en appliquant la seconde solution au système formé par le Soleil, la Terre et la Lune, il a été conduit à une conclusion peu exacte, ainsi que M. Liouville l'a fait voir dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1845.

Pour nous placer au point de vue envisagé par Laplace dans la seconde solution, admettons que le Soleil, la Terre et la Lune se soient trouvés placés en ligne droite à une époque arbitraire, prise pour origine. Nous reconnaîtrons avec cet illustre auteur que si, après avoir établi une relation convenable entre les masses et les distances de ces trois corps, on imprime à la Lune et à la Terre, autour du centre du Soleil, des vitesses parallèles entre elles et proportionnelles aux rayons vecteurs, les trois masses, sous l'influence de leurs actions réciproques, resteront constamment en ligne droite, la droite qui les contient étant, bien entendu, mobile, c'est-à-dire exécutant un mouvement uniforme de rotation autour du Soleil.

Digitized by Google

Laplace démontre, en outre, que la relation qui doit exister entre les masses et les distances des trois corps se trouve satisfaite lorsqu'on place la Lune à une distance de la Terre égale à très peu près à la centième partie de la distance de la Terre au Soleil ; et il en conclut que si, à l'époque prise pour origine, la Terre et la Lune s'étaient trouvées placées sur une même droite, à des distances respectives du Soleil, proportionnelles à 100 et à 101, et si, de plus, on leur avait imprimé des vitesses parallèles et proportionnelles à ces distances, la Lune eût été sans cesse en opposition avec le Soleil ; ces deux astres se seraient succédé l'un à l'autre sur l'horizon, et comme, à cette distance, la Lune n'eût point été éclipsée, sa lumière pendant les nuits aurait constamment remplacé la lumière du Soleil (*a*).

Mais, pour l'exactitude de cette proposition, il faudrait, comme l'a fait remarquer M. Liouville, que le système formé par les trois corps fût stable, c'est-à-dire que, dérangé tant soit peu de sa position, il tendît constamment à y revenir. Or, c'est ce qui est loin d'avoir lieu, ainsi que M. Liouville

(*a*) *Mécanique céleste, livre X, chap. VI.* Cette assertion a été reproduite un peu plus tard dans le livre IV de l'*Exposition du système du monde* « Quelques partisans des causes finales, dit Laplace, ont imaginé que la Lune a été donnée à la Terre pour l'éclairer pendant les nuits. Dans ce cas, la nature n'aurait point atteint le but qu'elle se serait proposé, puisque nous sommes souvent privés à la fois de la lumière du Soleil et de celle de la Lune. Pour y parvenir, il eût suffi de mettre, à l'origine, la Lune en opposition avec le Soleil, dans le plan même de l'écliptique, à une distance égale à la centième partie de la distance de la Lune au Soleil, et de donner à la Lune et à la Terre des vitesses parallèles et proportionnelles à leurs distances à cet astre. Alors la Lune, sans cesse en opposition avec le Soleil, eût décrit autour de lui une ellipse semblable à celle de la Terre ; ces deux astres se seraient succédé l'un à l'autre sur l'horizon, et la lumière de la Lune aurait constamment remplacé celle du Soleil. »

Digitized by Google

l'a démontré dans son Mémoire. Ce grand géomètre, en soumettant cette question de stabilité à l'analyse, a reconnu, en effet, que l'état particulier de mouvement qui nous occupe est instable, et que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contrebalancés par les actions mutuelles des trois corps, sont, au contraire, agrandis d'une manière rapide, et cela, quels que soient les rapports de grandeur existant entre les masses. Il en a donc conclu que si les conditions énoncées par Laplace s'étaient trouvées remplies à l'origine du mouvement, la lumière de la Lune, loin de remplacer celle du Soleil pendant les nuits, aurait été probablement beaucoup moins fréquente qu'elle ne l'est dans l'état actuel des choses.

Relativement au système formé par la première solution, M. Gaschaud a fait voir qu'il est stable quand le carré de la somme des trois masses m_1, m_2, m_3, divisé par la somme de leurs produits deux à deux $m_1\ m_2$, $m_1\ m_3$, $m_2\ m_3$, est plus grande que 27, inégalité qui se trouve toujours satisfaite dans le système formé par le Soleil, la Terre et la Lune, où l'une des masses est incomparablement plus grande que celles des deux autres.

Digitized by Google

TRAITÉ
D'ASTRONOMIE THÉORIQUE

Première Partie

EXPOSITION DU CALCUL DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES ET LUNAIRES

LIVRE I

Théorie du mouvement elliptique — Première approximation du mouvement héliocentrique des planètes

CHAPITRE I

Équations différentielles du mouvement héliocentrique des planètes

I. — Des éléments qui constituent une inégalité. — Définition du coefficient, de l'argument et de la période.

Les mouvements des planètes et des satellites ne sont pas rigoureusement soumis aux lois de Kepler. En vertu de leur attraction mutuelle, ces corps se meuvent dans des orbites qui changent à chaque instant de forme et de position dans l'espace. Ainsi, la grandeur et la position du grand axe d'une planète, son excentricité, la ligne des nœuds et son inclinaison, ne sont pas des éléments rigoureusement constants. Ces éléments éprouvent des variations continuelles que l'observation a fait connaître et que la théorie détermine. On les nomme *perturbations* ou *inégalités*. Comme la masse du Soleil est incomparablement plus grande que celle des pla-

Digitized by Google

nètes, ces variations ou perturbations sont toujours très petites, et ce n'est généralement qu'au bout d'un très long espace de temps qu'elles sont rendues sensibles à l'observateur ; toutefois, leur évaluation exacte est nécessaire, lorsqu'on veut construire des *Tables générales*, qui fassent connaître avec précision et pour un temps indéfini les mouvements des corps célestes autour du Soleil.

Les variations que subissent ainsi les éléments de l'orbite elliptique par l'effet des attractions mutuelles sont de deux sortes. On les distingue en *inégalités périodiques* et en *inégalités séculaires*. Les premières dépendent de la position des planètes, soit entre elles, soit à l'égard de leurs nœuds, et se rétablissent toutes les fois que ces positions redeviennent les mêmes, c'est-à-dire après un très petit nombre de révolutions. Les secondes, au contraire, indépendantes de la configuration des planètes et de leurs positions respectives, croissent avec une extrême lenteur et finissent, en s'accumulant, par changer entièrement la forme et la position de l'orbite décrite. Comme les premières, elles sont bien périodiques, mais la durée de leur période est incomparablement plus grande que celle des inégalités périodiques proprement dites.

La propriété qu'ont les sinus et cosinus de reprendre les mêmes valeurs, après l'addition d'un nombre quelconque de circonférences, les rend éminemment propres à représenter toutes les inégalités dont les mouvements des corps célestes peuvent être affectés. Dans la théorie des mouvements planétaires, les termes qui composent les inégalités que l'on a à considérer sont ordinairement de cette forme

$$\mathfrak{p} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left[\Phi t + \mathfrak{a}\right].$$

Digitized by Google

$\mathfrak{p}$ est le *coefficient* de l'inégalité, Φt l'*argument* ou l'angle dont elle dépend, et $\mathfrak{A}$ un coefficient fonction comme $\mathfrak{p}$ des éléments des orbites planétaires à une époque donnée. Généralement Φ est exprimé par une suite de termes tels que

$$\Phi = in + i'n' + i''n'' + \ldots,$$

n, n', n'' étant les moyens mouvements des diverses planètes dont on considère les actions réciproques, et i, i', i'' des nombres entiers quelconques. Comme la plus grande valeur que puisse acquérir le sinus ou le cosinus est l'unité, on voit que $\mathfrak{p}$ est le *maximum* des valeurs par lesquelles peut passer l'inégalité, lorsque l'angle Φt ou son argument varie de 0° à 360°. La grandeur de l'inégalité dépend ainsi de son coefficient et doit changer de signes comme le sinus ou le cosinus qui entre dans son expression; elle est nulle toutes les fois que ce sinus ou ce cosinus se réduit à zéro. L'intervalle de temps qui sépare deux retours consécutifs de l'inégalité à la même valeur se nomme sa *période;* cet élément a donc pour expression

$$\frac{2\pi}{\Phi},$$

π désignant la demi-circonférence ou 180°.

II. — Du problème des perturbations planétaires. — Simplifications que la disposition particulière de notre système introduit dans la solution de ce problème.

La recherche du mouvement héliocentrique des planètes, en ayant égard à toutes les causes de perturbation, constitue un problème qui, par sa complication, présenterait des difficultés insurmontables s'il fallait le résoudre dans toute sa

Digitized by Google

généralité. L'analyse la plus profonde a été impuissante jusqu'ici à en donner une solution directe, et ce n'est qu'en se fondant sur certaines simplifications que les géomètres sont parvenus à le résoudre par approximation. La constitution de notre système planétaire offre pour cela des avantages dont il était aisé de profiter. En effet, eu égard à la petitesse des dimensions des corps célestes par rapport à leurs distances mutuelles et à la presque sphéricité de leur forme, on a pu d'abord faire abstraction de leur figure et les considérer comme de simples points matériels placés à leurs centres de gravité respectifs. Cette circonstance, qui ramène la recherche du mouvement des corps célestes à celle du mouvement de leurs centres de gravité, a une grande importance dans la question qui nous occupe, car elle permet d'écrire presque immédiatement et sous leur forme la plus simple les équations différentielles du mouvement. Ce que nous disons des planètes relativement au Soleil a également lieu pour les satellites à l'égard de leur planète principale, c'est-à-dire que, la distance de ces astres à leur planète centrale étant très petite relativement aux distances qui séparent la planète du Soleil et des autres planètes, on peut, sans erreur sensible, regarder l'action exercée par l'ensemble d'une planète et de ses satellites sur les autres corps du système solaire comme étant la même que si toute la masse de la planète et de ses satellites était réunie à leur centre commun de gravité. Et comme l'action exercée par les autres corps du système solaire est la même sur la planète et sur ses satellites, on voit encore que ces derniers corps se mouvront autour de la planète à très peu près de la même manière que s'ils n'étaient soumis qu'à l'action seule de cet astre.

Digitized by Google

Une autre simplification importante, et que la disposition particulière de notre système introduit dans la solution du problème, résulte de la petitesse des masses planétaires comparativement à celle du Soleil. On sait, en effet, que la masse de la plus grosse planète est au moins mille fois plus petite que celle du Soleil, et qu'un rapport plus petit encore existe entre les masses des satellites et celles de leurs planètes principales. Il en résulte que l'on peut, dans une première approximation, faire abstraction des actions provenant des diverses masses perturbatrices, actions qui sont proportionnellement fort petites, et n'avoir égard, dans le mouvement du corps que l'on considère, qu'à l'action seule du Soleil, action qui est en effet de beaucoup la plus considérable et la plus prépondérante du mouvement. La forme de l'orbite décrite est alors celle d'une ellipse que l'on peut corriger par des approximations successives, en appliquant aux éléments de cette courbe les termes perturbateurs qui naissent des actions réciproques développées par les autres planètes. Cette méthode, qui permet d'arriver ainsi par essais successifs et d'une exactitude toujours croissante à la connaissance du mouvement troublé, s'applique aisément aux planètes; mais elle devient très pénible dans le cas de la Lune, à cause de la grandeur de la force perturbatrice qui augmente considérablement le nombre des inégalités et rend beaucoup moins convergentes les séries à mesure que l'on s'élève dans l'ordre des approximations.

Digitized by Google

III. — Équations qui définissent le mouvement des planètes autour du soleil, abstraction faite de leur figure.

Nous allons, dans ce paragraphe, nous proposer d'établir les équations différentielles qui déterminent le mouvement troublé des corps célestes autour du Soleil, abstraction faite de leur figure, c'est-à-dire en les considérant comme de simples points matériels placés à leurs centres de gravité respectifs.

Soient donc, dans cette hypothèse, m, m', m''... les masses ou points matériels des différents corps qui composent notre système;

x, y, z; x', y', z'... les coordonnées respectives de ces corps, rapportées au centre M du Soleil pris pour origine;

r, r', r''... les distances Mm, Mm', Mm''... de ces corps à celui M;

ρ, ρ', ρ'' leurs distances mutuelles ou mm', mm''...

On aura

$$(a)\quad \begin{cases} r^2 = \overline{\mathrm{M}m}^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ r'^2 = \overline{\mathrm{M}m'}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ r''^2 = \overline{\mathrm{M}m''}^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho^2 = \overline{mm'}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2, \\ \rho'^2 = \overline{mm''}^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Digitized by Google

Posons, dans le cas de trois corps M, m, m',

$$\mu = M + m.$$

Dans son mouvement relatif autour de M, le corps m sera soumis aux trois forces $\frac{\mu}{r^2}$, $\frac{m'}{\rho^2}$, $\frac{m'}{r'^2}$ respectivement dirigées suivant les lignes mM, mm', $m'M$; et, comme les cosinus des angles que font les directions de chacune de ces forces avec l'axe des x ont respectivement pour expression $\frac{x}{r}$, $\frac{x'-x}{\rho}$, $\frac{x'}{r'}$, on aura, pour les composantes de ces forces dirigées suivant le même axe,

$$(\alpha) \qquad \frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{m'(x'-x)}{\rho^3}, \quad \frac{m'x'}{r'^3};$$

pour les composantes des mêmes forces dirigées suivant l'axe des y, on aurait pareillement

$$(\beta) \qquad \frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{m'(y'-y)}{\rho^3}, \quad \frac{m'y'}{r'^3};$$

et pour celles parallèles à l'axe des z,

$$(\gamma) \qquad \frac{\mu z}{r^3}, \quad \frac{m'(z'-z)}{\rho^3}, \quad \frac{m'z'}{r'^3}.$$

La somme des trois composantes (α), (β), (γ), pour chaque direction, est évidemment la composante totale, suivant cette direction, de la force qui agit sur le corps m, force qui est égale et de signe contraire à l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ ou $\frac{d^2z}{dt^2}$. D'après cela, et en étendant ces considérations à un nombre quelconque de corps m'', m'''..., on aura donc, pour les équa-

Digitized by Google

tions du mouvement relatif de m autour de M,

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\mu x}{r^3}=\sum m'\left(\dfrac{x'-x}{\rho^3}-\dfrac{x'}{r'^3}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{\mu y}{r^3}=\sum m'\left(\dfrac{y'-y}{\rho^3}-\dfrac{y'}{r'^3}\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{\mu z}{r^3}=\sum m'\left(\dfrac{z'-z}{\rho^3}-\dfrac{z'}{r'^3}\right). \end{cases}$$

Le signe $\sum$ indique que chaque masse m'', m'''... introduit dans les équations (A) un terme semblable à celui qui résulte de l'action de m' sur m, terme que l'on obtiendrait en changeant, dans les seconds membres de ces équations, m', ρ, x' et r' en m'', ρ', x'', r''; m''', ρ'', x'', r'''...

Maintenant, on déduit des équations (a) qui précèdent

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}=\frac{x'-x}{\rho^3},\qquad \frac{d}{dy}\frac{1}{\rho}=\frac{y'-y}{\rho^3},\qquad \frac{d}{dz}\frac{1}{\rho}=\frac{z'-z}{\rho^3}.$$

Quant aux termes $\frac{x'}{r'^3}$, $\frac{y'}{r'^3}$, $\frac{z'}{r'^3}$, comme r' est indépendant de x, y, z, ce sont les dérivées prises par rapport à ces variables de $\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}$.

En posant donc

$$(B)\ R=\sum m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)=\sum m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{r^2+r'^2-\rho^2}{2r'^3}\right),$$

on aura

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\mu x}{r^3}=\dfrac{dR}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{\mu y}{r^3}=\dfrac{dR}{dy}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{\mu z}{r^3}=\dfrac{dR}{dz}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Ces équations déterminent le mouvement du corps m autour de M. Et l'on obtiendrait des équations semblables pour chacun des autres corps m', m''... du système, en accentuant convenablement les lettres m, x, y, z, r. On serait ainsi conduit à autant d'équations différentielles du second ordre qu'il y a de coordonnées x, y, z, x', y', z' à déterminer en fonction de la variable t prise pour le temps.

IV. — Intégrales fournies par les équations précédentes

Les seules intégrales rigoureuses qu'on ait pu tirer jusqu'ici du système des équations (C), réunies aux équations semblables relatives à m', m''..., sont celles qui résultent des principes de la conservation du mouvement du centre de gravité, des aires et des forces vives. Comme les deux dernières de ces intégrales nous seront particulièrement utiles dans la suite, nous allons les développer ici, en ne supposant, pour simplifier, que deux planètes m et m'.

Dans ce cas, les formules (A) du paragraphe précédent se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = m'\left[\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx} - \frac{x'}{r'^3}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = m'\left[\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy} - \frac{y'}{r'^3}\right],$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = m'\left[\frac{d\frac{1}{\rho}}{dz} - \frac{z'}{r'^3}\right];$$

Digitized by Google

et, en supposant $mm'\frac{1}{\rho} = \chi$, d'où $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{mm'}\chi$, on peut leur donner cette forme :

$$(\mathrm{A}') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \frac{m'x'}{r'^3} = \frac{1}{m}\frac{d\chi}{dx}, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \frac{m'y'}{r'^3} = \frac{1}{m}\frac{d\chi}{dy}, \\ &\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \frac{m'z'}{r'^3} = \frac{1}{m}\frac{d\chi}{dz}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions la première de ces formules par

$$my - m\frac{my + m'y'}{\mu + m'},$$

la seconde par

$$-mx + m\frac{mx + m'x'}{\mu + m'},$$

et les équations semblables relatives à x' et à y' par

$$m'y - m'\frac{my + m'y'}{\mu + m'}, \quad -m'x' + m'\frac{mx + m'x'}{\mu + m'},$$

respectivement. En ajoutant ensemble les produits ainsi formés, et observant que, par la nature de la fonction χ,

$$y\frac{d\chi}{dx} + y'\frac{d\chi}{dx'} - \left(x\frac{d\chi}{dy} + x'\frac{d\chi}{dy'}\right) = 0,$$

$$\frac{d\chi}{dx} + \frac{d\chi}{dx'} = 0, \qquad \frac{d\chi}{dy} + \frac{d\chi}{dy'} = 0,$$

Digitized by Google

on aura

$$m\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right) + m'\left(\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2}\right)$$
$$+ \frac{my + m'y'}{\mu + m'}\, m\,\frac{d^2x}{dt^2} + m'\,\frac{d^2x'}{dt^2}$$
$$- \frac{mx + m'x'}{\mu + m'}\, m\,\frac{d^2y}{dt^2} + m'\,\frac{d^2y'}{dt^2} = 0\,;$$

d'où, en appelant C une constante, et intégrant;

$$m\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right) + m'\left(\frac{x'dy' - y'dx'}{dt}\right)$$
$$+ \frac{my + m'y'}{\mu + m'}\, m\,\frac{dx}{dt} + m'\,\frac{dx'}{dt}$$
$$- \frac{mx + m'x'}{\mu + m'}\, m\,\frac{dy}{dt} + m'\,\frac{dy'}{dt} = C,$$

équation que l'on peut mettre sous cette forme:

$$Mm\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right) + Mm'\left(\frac{x'dy' - y'dx'}{dt}\right)$$
$$+ mm'\left[\frac{(x' - x)(dy' - dy) - (y' - y)(dx' - dx)}{dt}\right] = C.$$

On parviendrait de la même manière aux deux autres intégrales suivantes:

$$Mm\left(\frac{zdx - xdz}{dt}\right) + Mm'\left(\frac{z'dx' - x'dz'}{dt}\right)$$
$$+ mm'\left[\frac{(z' - z)(dx' - dx) - (x' - x)(dz' - dz)}{dt}\right] = C',$$
$$Mm\left(\frac{ydz - zdy}{dt}\right) + Mm'\left(\frac{y'dz' - z'dy'}{dt}\right)$$
$$+ mm'\left[\frac{(y' - y)(dz' - dz) - (z' - z)(dy' - dy)}{dt}\right] = C'',$$

Digitized by Google

dans lesquelles C′ et C″ désignent des constantes arbitraires. Ces intégrales, jointes à la précédente, renferment le principe de la conservation des aires.

Si l'on multiplie encore la première des équations (A′) par

$$2mdx - 2m\frac{mdx + m'dx'}{\mu + m'};$$

la seconde par

$$2mdy - 2m\frac{mdy + m'dy'}{\mu + m'};$$

la troisième par

$$2mdz - 2m\frac{mdz + m'dz'}{\mu + m'},$$

et les équations semblables en x', y', z' par

$$2m'dx' - 2m'\frac{mdx + m'dx'}{\mu + m'},$$

$$2m'dy' - 2m'\frac{mdy + m'dy'}{\mu + m'},$$

$$2m'dz' - 2m'\frac{mdz + m'dz'}{\mu + m'},$$

respectivement; puis qu'on ajoute ensemble ces différents produits et qu'on observe que, par la nature de la fonction χ,

$$\frac{d\chi}{dx} + \frac{d\chi}{dx'} = 0, \quad \frac{d\chi}{dy} + \frac{d\chi}{dy'} = 0, \quad \frac{d\chi}{dz} + \frac{d\chi}{dz'} = 0,$$

on aura, après avoir intégré,

$$m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2}$$

$$- \frac{(mdx + m'dx')^2 + (mdy + m'dy')^2 + (mdz + m'dz')^2}{(\mu + m')\,dt^2}$$

$$- 2\left[M\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}\right) - \chi\right] = const,$$

Digitized by Google

ou bien

$$M\left[m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}\right]$$
$$+mm'\left[\frac{(dx'-dx)^2+(dy'-dy)^2+(dz'-dz)^2}{dt^2}\right.$$
$$-2(\mu+m')\left[M\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}\right)+\chi\right]=h,$$

h étant une constante arbitraire. Cette équation renferme le principe de la conservation des forces vives.

V. — Réduction du problème des n corps a celui du mouvement de $n-1$ corps fictifs. — Substitution linéaire de Jacobi.

Dans son mémoire sur l'*Élimination des nœuds dans le problème des trois corps*, Jacobi a fait connaître une transformation très remarquable qui permet de remplacer le mouvement de n corps, qui s'attirent mutuellement, par celui de $n-1$ corps fictifs, ayant même fonction des forces U, et pour lequel les principes de la conservation des aires et des forces vives ne cessent pas d'avoir lieu. Nous avons déjà analysé cette transformation dans la seconde section de l'*Introduction historique;* nous allons la reprendre ici, en l'appliquant au cas du mouvement de trois corps.

Soient donc m_1, m_2, m_3 les masses de trois corps que nous supposerons réduits à de simples points matériels;

ρ_1, ρ_2, ρ_3 leurs distances mutuelles;

Digitized by Google

x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les neuf coordonnées respectives de ces corps, rapportées à leur centre commun de gravité, centre que l'on peut supposer en repos.

Entre ces trois systèmes de coordonnées et les masses, on aura d'abord les trois équations linéaires suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0,\\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0,\\ m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1q_1 + \beta_1q_2,\\ x_2 &= \alpha_2q_1 + \beta_2q_2,\\ x_3 &= \alpha_3q_1 + \beta_3q_2,\\ y_1 &= \alpha_1q_3 + \beta_1q_4,\\ y_2 &= \alpha_2q_3 + \beta_2q_4,\\ y_3 &= \alpha_3q_3 + \beta_3q_4,\\ z_1 &= \alpha_1q_5 + \beta_1q_6,\\ z_2 &= \alpha_2q_5 + \beta_2q_6,\\ z_3 &= \alpha_3q_5 + \beta_3q_6,\end{aligned}\right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant des coefficients constants et $q_1, q_2 \ldots q_6$ six variables nouvelles qui pourront remplacer les neuf coordonnées x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3, si l'on assujettit les constantes $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ à satisfaire aux deux relations linéaires suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 &= 0,\\ m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

En joignant à ces équations les trois relations :

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu = m_1\alpha_1^2 + m_2\alpha_2^2 + m_3\alpha_3^2, \\ \mu_1 = m_1\beta_1^2 + m_2\beta_2^2 + m_3\beta_3^2, \\ 0 = m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 + m_3\alpha_3\beta_3, \end{cases}$$

l'expression T de la demi somme des forces vives du système deviendra

$$(5)\qquad T = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq^5}{dt}\right)^2\right] + \frac{\mu_1}{2}\left[\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_4}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_6}{dt}\right)^2\right];$$

et si l'on pose

$$(6)\qquad U = \frac{m_2m_3}{\rho_1} + \frac{m_1m_3}{\rho_2} + \frac{m_2m_1}{\rho_3} = \sum\frac{m_1m_2}{\rho},$$

puis que, dans la relation $T = U - H$ (H étant une constante arbitraire), on substitue à la place de T et de U leurs valeurs transformées à l'aide des relations (2), on aura, en faisant usage des formules connues de Lagrange,

$$(7)\qquad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2q_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dq}, & \mu_1\dfrac{d^2q_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dq_2}, \\ \mu\dfrac{d^2q_3}{dt^2} = \dfrac{dU}{dq_3}, & \mu_1\dfrac{d^2q_4}{dt^2} = \dfrac{dU}{dq_4}, \\ \mu\dfrac{d^2q_5}{dt^2} = \dfrac{dU}{dq_5}, & \mu_1\dfrac{d^2q_6}{dt^2} = \dfrac{dU}{dq_6}. \end{cases}$$

C'est la forme que Jacobi a donnée aux équations différentielles du Problème des trois corps. Ces équations se rapportent, comme on le voit, au mouvement de deux corps fictifs μ et μ_1.

On a maintenant, pour exprimer les distances mutuelles

Digitized by Google

m_2m_3, m_1m_3, m_2m_1, des trois points considérés,

$$(8)\quad \begin{cases} \rho_1^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2, \\ \rho_2^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z^3)^2, \\ \rho_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)^2, \end{cases}$$

et, d'après les formules (2),

$$(9)\quad \begin{cases} \rho_1^2 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) \\ \qquad\qquad + (\beta_2 - \beta_3)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ + 2(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3)(q_1q_2 + q_3q_4 + q_5q_6); \\ \rho_2^2 = (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) \\ \qquad\qquad + (\beta_1 - \beta_3)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ + 2(\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_3)(q_1q_2 + q_3q_4 + q_5q_6); \\ \rho_3^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) \\ \qquad\qquad + (\beta_1 - \beta_2)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(q_1q_2 + q_3q_4 + q_5q_6). \end{cases}$$

Par conséquent

$$(10)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2q_1}{dt_2} = -\sum \dfrac{m_1m_2}{\rho^3} [(\alpha_2 - \alpha_3)^2 q_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) q_2], \\ \mu_1 \dfrac{d^2q_2}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1m_2}{\rho^3} [(\beta_2 - \beta_3)^2 q_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) q_1], \\ \mu \dfrac{d^2q_3}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1m_2}{\rho^3} [(\alpha_2 - \alpha_3)^2 q_3 + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) q_4], \\ \mu_1 \dfrac{d^2q_4}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1m_2}{\rho^3} [(\beta_2 - \beta_3)^2 q_4 + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) q_3], \\ \mu \dfrac{d^2q_5}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1m_2}{\rho^3} [(\alpha_2 - \alpha_3)^2 q_5 + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) q_6], \\ \mu_1 \dfrac{d^2q_6}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1m_2}{\rho^3} [(\beta_2 - \beta_3)^2 q_6 + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) q_5]. \end{cases}$$

Digitized by Google

A la seule inspection de ces formules, on reconnaît que

$$\mu\left(q_5\frac{d^2q_1}{dt^2}-q_1\frac{d^2q_5}{dt^2}\right)+\mu_1\left(q_6\frac{d^2q_2}{dt^2}-q_2\frac{d^2q_6}{dt^2}\right)=0,$$

$$\mu\left(q_3\frac{d^2q_5}{dt^2}-q_5\frac{d^2q_3}{dt^2}\right)+\mu_1\left(q_4\frac{d^2q_6}{dt^2}-q_6\frac{d^2q_4}{dt_2}\right)=0,$$

$$\mu\left(q_1\frac{d^2q_3}{dt^2}-q_3\frac{d^2q_1}{dt^2}\right)+\mu_1\left(q_2\frac{d^2q_4}{dt^2}-q_4\frac{d^2q_2}{dt^2}\right)=0;$$

d'où résultent les trois intégrales

$$(11)\begin{cases}\mu\left(q_5\frac{dq_1}{dt}-q_1\frac{dq_5}{dt}\right)+\mu_1\left(q_6\frac{dq_2}{dt}-q_2\frac{dq_6}{dt}\right)=A_1,\\ \mu\left(q_3\frac{dq_5}{dt}-q_5\frac{dq_3}{dt}\right)+\mu_1\left(q_4\frac{dq_6}{dt}-q_6\frac{dq_4}{dt}\right)=B_2,\\ \mu\left(q_1\frac{dq_3}{dt}-q_3\frac{dq_1}{dt}\right)+\mu_1\left(q_2\frac{dq_4}{dt}-q_4\frac{dq_2}{dt}\right)=C_3.\end{cases}$$

Ces intégrales sont celles des aires dans le système que nous venons de considérer.

Digitized by Google

CHAPITRE II

Intégration des équations du mouvement en supposant nulles les forces perturbatrices

I. — Du mouvement elliptique des planètes

Les variations que subissent les éléments de l'orbite elliptique par l'effet des forces perturbatrices étant toujours très faibles, on peut, dans les limites d'une première approximation, considérer chaque effet isolément, et prendre pour l'effet total résultant des diverses actions réunies la somme des effets que produirait chaque force considérée séparément. De cette manière, et quel que soit le nombre des corps qui composent le système, le problème des perturbations est toujours ramené à la considération de trois masses M, m, m' qui sont un corps central prédominant M, un corps troublé m, et un corps troublant m'. Les équations qui déterminent les lois du mouvement troublé sont alors celles (C), dans lesquelles R a pour valeur

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right].$$

Lorsqu'on néglige l'action perturbatrice de m', la fonction

Digitized by Google

des forces R s'évanouit et les équations (C) se trouvent réduites aux termes seuls qui définissent le *mouvement elliptique* ou non troublé de m autour de M. Nous allons étudier en particulier les lois qui se déduisent de ce mouvement, lois purement hypothétiques, mais que les géomètres et les astronomes ont dû considérer pour établir le *principe des approximations successives*.

Multiplions la deuxième des équations (C) par x et la première par y; la première par z et la troisième par x; la troisième par y et la deuxième par z; puis retranchons, dans chaque combinaison, la première équation de la seconde. En désignant par x', y', z' les dérivées des coordonnées prises par rapport au temps, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} xy' - yx' &= \int \left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right) dt = \mathcal{H}, \\ zx' - xz' &= \int \left(z\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dx}\right) dt = \mathcal{H}', \\ yz' - zy' &= \int \left(y\frac{dR}{dz} - z\frac{dR}{dy}\right) dt = \mathcal{H}'', \end{aligned}\right.$$

expressions qui, étant multipliées respectivement par z, y, x, donnent

$$(3)\qquad \mathcal{H}z + \mathcal{H}'y + \mathcal{H}''z = 0.$$

Dans le mouvement elliptique où $R = 0$, les quantités $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ sont des constantes, et l'équation (3) représente un plan de position invariable qui passe par l'origine des coordonnées ou par le centre du Soleil. Dans le cas du mouve-

Digitized by Google

ment troublé, ces quantités varient avec t, et l'équation (3) ne peut être regardée comme représentant un plan que pendant un intervalle de temps infiniment petit. La planète se meut alors en passant successivement d'un arc d'ellipse à un autre, à chaque instant dt, et décrit ainsi une courbe à laquelle toutes les ellipses variables deviennent des courbes osculatrices.

Soit dv l'angle décrit par le rayon vecteur r dans l'instant dt; l'aire décrite par ce rayon sur le plan de l'orbite aura pour expression

$$\frac{1}{2} r^2 dv,$$

et, en appelant φ, φ_1, φ_2 les angles compris entre le plan des deux rayons vecteurs ou de la courbe et les plans coordonnés xy, xz, yz, on aura

$$(4) \qquad r^2 dv \cos\varphi = \mathcal{X} dt, \qquad r^2 dv \cos\varphi_1 = \mathcal{X}' dt,$$
$$r^2 dv \cos\varphi_2 = \mathcal{X}'' dt\ ;$$

car les premiers membres des équations (2) ne sont autre chose que les projections du double de l'aire décrite par la planète pendant l'instant dt sur les plans des xy, des xz et des zy.

De là résulte

$$(5) \qquad r^4 dv^2 = K^2 dt^2 \quad \text{ou} \quad r^2 dv = K dt,$$

en faisant, pour abréger, $K^2 = \mathcal{X}^2 + \mathcal{X}'^2 + \mathcal{X}''^2$.

φ désignant toujours l'angle que le plan de la courbe fait avec le plan fixe des xy ou de l'ecliptique, appelons θ l'angle que forme la commune intersection de ces plans avec l'axe

Digitized by Google

des x ou la *longitude du nœud*; on aura, par les principes de la Trigonométrie sphérique,

$$\cos\varphi_1 = \sin\varphi\cos\theta, \qquad \cos\varphi_2 = \sin\varphi\sin\theta\,;$$

on aura par suite

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathcal{X} = \mathrm{K}\cos\varphi, \\ \mathcal{X}' = -\mathrm{K}\sin\varphi\cos\theta, \\ \mathcal{X}'' = \mathrm{K}\sin\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (3) donnent

$$z\cos\varphi - y\sin\varphi\cos\theta + x\sin\varphi\sin\theta = 0$$

d'où

$$(7)\qquad z = y\,\mathrm{tang}\,\varphi\cos\theta - x\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin\theta.$$

C'est l'*équation du plan* de l'orbite fixe ou variable.

Quant aux valeurs de φ et de θ qui fixent la position de ce plan, elles seront déterminées par les équations (7) lorsque les constantes arbitraires $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}''$ seront connues. On a, en effet, en fonction de ces arbitraires.

$$(8)\qquad \mathrm{tang}\,\theta = -\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}'}, \qquad \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{\mathcal{X}'^2 + \mathcal{X}''^2}}{\mathcal{X}}.$$

II. — Forme de l'orbite décrite

L'équation (5) fournie par le principe des aires représente une intégrale première des équations (C), privées de leurs

Digitized by Google

seconds membres. On en obtient une seconde par l'emploi du principe des forces vives.

On trouve, en effet, par l'application de ce principe,

$$(9) \qquad \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{dv^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

En éliminant dt entre cette équation et celle (5), on obtient

$$K^2 \left(\frac{dr^2 + r^2 dv^2}{r^4 dv^2}\right) = \frac{2\mu}{r} + C;$$

d'où

$$(10) \qquad dv = \frac{K dr}{r\sqrt{Cr^2 + 2\mu r - K^2}},$$

équation différentielle de la trajectoire.

Pour en trouver l'intégrale, considérons le trinôme

$$Cr^2 + 2\mu r - K^2 = 0$$

par lequel se trouvent déterminées les valeurs maxima et minima de r, valeurs que nous désignerons respectivement par $a(1+e)$ et $a(1-e)$. La somme de ces deux racines étant égale à $-\frac{2\mu}{C}$ et leur produit à $-\frac{K^2}{C}$, on aura

$$-\frac{2\mu}{C} = 2a, \qquad -\frac{K^2}{C} = a^2(1-e^2);$$

d'où

$$(11) \qquad C = -\frac{\mu}{a}, \qquad K = \sqrt{a\mu(1-e^2)}.$$

Digitized by Google

D'après celà, l'expression ci-dessus de dv deviendra

$$dv = \frac{dr}{r} \frac{\sqrt{a\mu(1-e^2)}}{\sqrt{-\frac{\mu}{a}r^2 + 2\mu r - a\mu(1-e^2)}}$$

$$= \frac{dr}{r^2} \frac{\sqrt{a\mu(1-e^2)}}{\sqrt{-\frac{\mu}{2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{a\mu(1-e^2)}{r^2}}},$$

et, en divisant numérateur et dénominateur par $\sqrt{a\mu(1-e^2)}$, puis remarquant que $\frac{dr}{r^2} = -d\frac{1}{r}$, on aura

$$dv = \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{1}{a^2(1-e^2)} + \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2}}},$$

c'est-à-dire

$$dv = \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{(1-e^2)^2} - \frac{1}{1-e^2}\right] - \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1-e^2)}\right]^2}} = \frac{d\left[\frac{1}{r}\frac{a(1-e^2)}{e}\right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{\frac{1}{r}a(1-e^2)-1}{e}\right]^2}};$$

expression dont l'intégrale $\left(\text{en posant } \frac{\frac{a}{r}(1-e^2)-1}{e} = x\right)$ est

$$v = \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \omega + \text{arc}\cos x = \omega + \text{arc}\left[\cos = \frac{\frac{a}{r}(1-e^2)-1}{e}\right],$$

ω étant une constante arbitraire. On en déduit

$$\frac{a}{r}(1-e^2) - 1 = e\cos(v-\omega).$$

Digitized by Google

Ainsi

$$(13) \qquad v = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}.$$

Cette équation est celle d'une section conique rapportée à son foyer. Dans le cas des planètes, a est toujours positif et $e < 1$; cette équation représente alors une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers : a est le demi-grand axe de la courbe, et e son excentricité. L'ellipse se change en une parabole lorsque a est infini et e égal à 1 ; et en une hyperbole lorsque a est négatif et $e > 1$. La discussion de cette équation (13) montre que v et ω sont les angles formés par le rayon vecteur r et la ligne des apsides avec un axe fixe situé dans le plan de l'orbite, c'est-à-dire la *longitude vraie* de la planète et la *longitude du périhélie*. Quant à la différence $v - \omega$ de ces angles, qui fixe la distance de l'astre au périhélie, c'est ce qu'on nomme l'*anomalie vraie* de la planète.

III. — Conditions qui déterminent l'espèce de la section conique. — Loi du mouvement.

Il est intéressant de rechercher, dans les circonstances du mouvement, les conditions qui déterminent la nature de la section conique décrite par le corps m dans son mouvement relatif autour de M.

Appelons, pour cela, V la vitesse du mobile au moment où ses coordonnées sont x, y, z. Il est clair qu'on aura

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2},$$

Digitized by Google

et, par suite, l'expression (9) deviendra

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + C,$$

ou, en remplaçant C par sa valeur $-\frac{\mu}{a}$,

$$(a) \qquad V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Cette relation est très remarquable; elle montre que la vitesse V du mobile dans son orbite ne dépend que du grand axe et nullement de l'excentricité.

On en tire

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu};$$

et comme a est positif dans l'ellipse, qu'il est infini dans la parabole et négatif dans l'hyperbole, on en conclut que l'orbite décrite par m est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que l'on a

$$V^2 < 2\frac{\mu}{r}, \quad V^2 = 2\frac{\mu}{r}, \quad \text{ou } V^2 > 2\frac{\mu}{r}.$$

Revenons maintenant aux équations qui précèdent (5) et (9). Si, au lieu d'éliminer dt entre ces équations, on élimine dv, on aura

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{K^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + C.$$

équation d'où l'on tire

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{C + \frac{2\mu}{r} - \frac{K^2}{r^2}}};$$

Digitized by Google

c'est-à-dire, en remplaçant C et K par leurs valeurs (11),

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{rdr}{\sqrt{2ar - r^2 - a^2(1 - e^2)}} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}}.$$

On rend cette équation intégrable, en introduisant une variable auxiliaire u, liée à r par la relation

$$(14) \quad r = a(1 - e\cos u) \qquad \text{d'où} \quad dr = ae \sin u du$$

car il vient alors

$$(15) \qquad dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - e \cos u)\, du,$$

expression dont l'intégrale est

$$(16) \qquad nt + c = u - e \sin u,$$

en posant

$$(17) \qquad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

c est la constante introduite par l'intégration, u l'angle que l'on appelle *anomalie excentrique*, et nt le *moyen mouvement* ou l'*anomalie moyenne* de la planète m. Lorsqu'on prend pour origine du temps l'instant de la planète par le périhélie, t et u sont nuls en même temps; c disparaît donc, et l'on a

$$(18) \qquad nt = u - e \sin u.$$

Lorsque, au contraire, on convient de compter le temps à partir d'un instant quelconque après le passage au périhélie, l'angle nt se trouve augmenté de la constante $\varepsilon - \omega$, ε dé-

Digitized by Google

signant la longitude moyenne de la planète à l'origine du temps ou la *longitude de l'époque*; et, dans ce cas, on a

$$nt + \varepsilon - \omega = u - e \sin u,$$

ou

$$n(t + l) = u - e \sin u, \tag{19}$$

en posant $\varepsilon - \omega = nl = e$.

Soient T la durée de la révolution sidérale d'une planète m, et a sa distance moyenne au Soleil. En faisant $u = 2\pi$ dans la formule (18), on a

$$nt = 2\pi,$$

d'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}},$$

et, par suite,

$$\mu = 4\pi \frac{a^3}{T^2}.$$

Pour des masses planétaires égales, la quantité μ reste invariable; elle se réduit à M lorsqu'on néglige les masses des planètes par rapport à celle du Soleil. Dans ce cas, on a encore

$$\mu = 4\pi \frac{a'^3}{T'^2},$$

T' et a' désignant respectivement le temps de la révolution sidérale et la moyenne distance d'une autre planète m'. On a donc

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3},$$

proposition qui n'est vraie, comme on le voit, qu'autant que l'on

Digitized by Google

néglige les masses des planètes par rapport à celle du Soleil.

En éliminant r entre les équations (13) et (14), on obtient

$$\cos u = \frac{e + \cos(v - \omega)}{1 + e\cos(v - \omega)},$$

d'où

$$\frac{1 - \cos(v - \omega)}{1 + \cos(v - \omega)} = \frac{1 + e}{1 - e}\,\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u};$$

c'est-à-dire

$$(20) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(v - \omega) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u.$$

Cette formule fait connaître directement l'angle $(v - \omega)$ en fonction de u et par suite de t. Lorsqu'on compte les angles v à partir du périhélie, on a $\omega = 0$, et par suite

$$(21) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u.$$

Reprenons la valeur de $\cos u$ en fonction de $\cos(v - \omega)$ donnée ci-dessus, et substituons cette valeur dans les formules

$$\sin\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos u)},$$

$$\cos\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos u)},$$

on aura

$$\sin\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{(1 - e)[1 - \cos(v - \omega)]}{1 + e\cos(v - \omega)}\right)},$$

$$\cos\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{(1 + e)[1 + \cos(v - \omega)]}{1 + e\cos(v - \omega)}\right)}.$$

Digitized by Google

Remplaçant, dans ces dernières relations, $1 + e \cos(v - \omega)$ par sa valeur en fonction de r, puis mettant $2 \sin \frac{1}{2}(v - \omega)$ au lieu de $1 - \cos(v - \omega)$ et $2 \cos^2 \frac{1}{2}(v - \omega)$ au lieu de $1 + \cos(v - \omega)$, on trouvera

$$(22) \quad \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}(v - \omega) = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{1}{2} u, \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2}(v - \omega) = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{1}{2} u, \end{cases}$$

relations qui, divisées membre à membre, reproduisent la formule (20).

La valeur de e étant toujours plus petite que l'unité, on peut poser $e = \sin \eta$, ce qui donne

$$\sqrt{1 + e} = \sqrt{2} \sin\left(45^0 + \frac{\eta}{2}\right),$$

$$\sqrt{1 - e} = \sqrt{2} \cos\left(45^0 + \frac{\eta}{2}\right).$$

Par suite, on a

$$(23) \quad \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}(v - \omega) = \sqrt{2a} \sin\left(45^0 + \frac{\eta}{2}\right) \sin \frac{1}{2} u, \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2}(v - \omega) = \sqrt{2a} \cos\left(45^0 + \frac{\eta}{2}\right) \cos \frac{1}{2} u. \end{cases}$$

On a aussi

$$(24) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - \omega) = \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\eta}{2}\right) \operatorname{tang} \frac{1}{2} u.$$

Digitized by Google

IV. — Détermination des constantes que l'intégration introduit dans les formules du mouvement elliptique.

Les trois intégrales (13), (19), (20), que nous venons d'obtenir, renferment six constantes arbitraires

$$a,\ e,\ \theta,\ \varphi,\ \varepsilon,\ \omega,$$

qui sont les *éléments de l'orbite* de m. Deux de ces éléments ou constantes arbitraires a et e déterminent la nature de l'orbite décrite; deux autres θ et φ fixent la position de cette orbite dans l'espace; enfin ε et ω dépendent, l'une de la position du périhélie, et l'autre du passage de m par ce point. Les trois intégrales (13), (19) et (21) suffisent donc pour déterminer toutes les circonstances du mouvement de m autour de M.

Le cas le plus simple est celui où l'on donne l'une des positions de la planète sur son orbite, et la vitesse correspondante en grandeur et en direction. Dans ce cas, en effet, les six éléments de l'orbite elliptique peuvent être entièrement déterminées, au moyen des conditions initiales du mouvement de l'astre.

Soient

x, y, z les coordonnées de m par rapport à trois axes rectangulaires passant par le centre M du Soleil, regardé comme fixe;

x', y', z' les dérivées de ces coordonnées par rapport à t, dérivées qui sont les composantes de la vitesse estimée parallèlement aux mêmes axes;

Digitized by Google

V, la vitesse de la planète à l'instant où les coordonnées sont x, y, z;

u, l'anomalie excentrique ;

v_1, la longitude comptée à partir de l'intersection du plan de l'orbite avec le plan fixe ou de la ligne des nœuds ;

v, la longitude du rayon vecteur projeté sur le plan fixe ;

u_0, v^0, v_1^0 les valeurs de u, v et v_1, correspondant à $t = 0$.

D'après les formules des paragraphes I, II et III, on aura d'abord

$$xy' - yz' = \mathcal{K},$$

$$zx' - xz' = \mathcal{K}',$$

$$yz' - zy' = \mathcal{K}'',$$

$$V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$K = \sqrt{\mathcal{K}^2 + \mathcal{K}'^2 + \mathcal{K}''^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sqrt{\mathcal{K}'^2 + \mathcal{K}''^2}}{\mathcal{K}},$$

$$\operatorname{tang} \theta = -\frac{\mathcal{K}''}{\mathcal{K}},$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu},$$

$$K = \sqrt{\mu a (1 - e^2)},$$

relations qui feront connaître immédiatement φ, θ, α et e.

On aura ensuite, en supposant $t = 0$ dans la formule (19), et employant la valeur u_0 de u qui convient à cet instant,

$$nl = u_0 - e \sin u_0,$$

Digitized by Google

équation qui, étant rapprochée de la suivante

$$r = a\,(1 - e \sin u_0),$$

donnera l et u_0.

Si l'on considère maintenant le triangle sphérique rectangle dont v_0 est l'hypoténuse, $v_1^0 - \theta$ un côté de l'angle droit et φ l'angle adjacent, on aura

$$\cos\varphi \operatorname{tang} v^0 = \operatorname{tang}(v_1^0 - \theta),$$

équation qui permettra de calculer v^0, lorsque v_1^0 aura été déterminé par la formule $\operatorname{tang} v_1^0 = \frac{y}{x}$.

Il reste à déterminer l'angle ω ou la longitude du périhélie. Or, c'est ce qu'il est bien aisé de faire au moyen de la formule (13) du paragraphe II, qui donne $\cos(v_1^0 - \theta)$ en fonction de a, e, et de r.

Ainsi, les six éléments de l'orbite elliptique sont entièrement déterminés par ce qui précède, en fonction des six quantités x, y, z ; x', y', z', supposées connues.

V. — Propriété du mouvement héliocentrique et en particulier du mouvement dans l'ellipse. — Théorème de Lambert.

Il existe entre le grand axe de l'orbite d'une planète, le temps employé à décrire un arc de cette orbite, la corde qui soutend cet arc et les deux rayons vecteurs extrêmes, une relation très simple, qu'il est utile de connaître et qui se déduit aisément des formules du mouvement elliptique.

Digitized by Google

En effet, soient :

r et r' les deux rayons vecteurs menés aux extrémités de l'arc elliptique ;

σ la corde qui soutend cet arc ;

$t' - t = t_1$ le temps employé par la planète à le parcourir ;

u' et v' les valeurs de u et de v qui répondent comme r' à la seconde position de la planète, ou qui se rapportent au temps t' ;

et posons

$$t = a^{\frac{3}{2}}(u - e \sin u), \qquad t' = a^{\frac{3}{2}}(u' - e \sin u'),$$

$$r = a(1 - e \cos u), \qquad r' = a(1 - e \cos u'),$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \qquad r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v'},$$

$$\frac{1}{2}(u - u') = \delta, \qquad \frac{1}{2}(u + u') = \delta', \qquad r + r' = \rho.$$

En retranchant de l'expression de t' celle de t, et observant que

$$\sin u' - \sin u = 2 \sin \delta \sin \delta',$$

on aura

$$(1) \qquad t_1 = 2a^{\frac{3}{2}}(\delta - e \sin \delta \cos \delta').$$

On aura pareillement, en ajoutant ensemble les deux valeurs de r et r', et observant que

$$\cos u' + \cos u = 2 \cos \delta \cos \delta',$$

$$(2) \qquad \rho = 2a(1 - e \cos \delta \cos \delta').$$

D'un autre côté, on a, en considérant le triangle rectiligne

Digitized by Google

dont r, r' et σ sont les côtés et $v' - v$ l'angle opposé à σ,

$$(3) \qquad \sigma^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v)$$
$$= r^2 + r'^2 - 2rr' [\cos v \cos v' + \sin v \sin v'].$$

On a d'ailleurs, par la comparaison des deux valeurs ci-dessus de r et de r',

$$\cos v = \frac{a(\cos u - e)}{r}, \qquad \sin v = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin u}{r},$$
$$\cos v' = \frac{a(\cos u' - e)}{r'}, \qquad \sin v' = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin u'}{r'};$$

substituant ces valeurs dans celle (3), on aura donc

$$\sigma^2 = a^2 (1 - e \cos u)^2 + a^2 (1 - e \cos u')^2$$
$$- 2a^2 (e \cos u)(e \cos u') + a^2 (1 - e^2) \sin u \sin u'$$
$$= 2a^2 (1 - e^2)(1 - \sin u \sin u' - \cos u \cos u')$$
$$+ a^2 e^2 (\cos u - \cos u')^2,$$

ou, en remplaçant $\sin u \sin u' - \cos u \cos u'$ par $2\cos^2\delta - 1$, et $\cos u - \cos u'$ par $2 \sin\delta \sin\delta'$,

$$(4) \qquad \sigma^2 = 4a^2 \sin^2\delta (1 - e^2 \cos^2\delta).$$

Maintenant, si, dans les équations (1) et (4) on met pour $\cos\delta'$ sa valeur déduite de l'équation (2), et qui est $\frac{2a - \rho}{2a \cos\delta}$, on aura

$$t_1 = 2a^{\frac{3}{2}} \left(\delta + \frac{\rho - 2a}{2a} \operatorname{tang}\delta\right),$$
$$\sigma^2 = 4a^2 \operatorname{tang}^2\delta \left[\cos^2\delta - \left(\frac{2a - \rho}{2a}\right)^2\right],$$

Digitized by Google

formules dans lesquelles n'entre point l'excentricité e, mais qui dépendent encore de u et de u', c'est-à-dire de δ.

Pour éliminer cette dernière quantité, posons

$$z = \frac{2a + \sigma - \rho}{2a}, \qquad z' = \frac{2a - \sigma - \rho}{2a}.$$

La différence $(z - z')^2$ sera égale à $\frac{\sigma^2}{a^2}$, et l'on aura

$$\cos 2\delta = zz' + \sqrt{(1 - z^2)(1 - z'^2)};$$

d'où

$$2\delta = \text{arc}\cos z' - \text{arc}\cos z,$$

$$\tan\delta = \frac{1}{z + z'}[\sin(\text{arc}\cos z') - \sin\text{arc}(\cos z)].$$

On a d'ailleurs

$$z + z' = \frac{2a - \rho}{a};$$

substituant dans t_1, on aura donc

$$(\alpha)\quad t_1 = a^{\frac{3}{2}}\{(\text{arc}\cos z' - \text{arc}\cos z) - [\sin(\text{arc}\cos z') - \sin(\text{arc}\cos z)]\}.$$

C'est la relation cherchée. Cette relation établit, comme on le voit, le rapport très remarquable qui existe entre le temps employé par la planète à parcourir un arc de son orbite, la corde qui soutend cet arc et les deux rayons vecteurs extrêmes. Elle a reçu le nom de *théorème de Lambert;* mais, en réalité, elle n'est qu'une extension d'un théorème analogue relatif à la parabole et qu'Euler a donné le premier.

Digitized by Google

VI. — Du mouvement héliocentrique dans une orbite très excentrique. — Théorème d'Euler.

Dans ce cas, qui est celui des comètes (ces astres décrivent, en effet, des ellipses très allongées que l'on peut, sans erreur sensible, regarder comme des paraboles), il est permis de supposer $a = \infty$ et de réduire e à l'unité. Dès lors, si l'on représente par q la distance périhélie de la comète, et qu'on pose $p = a(1 - e^2)$, on aura $p = 2q$, et la formule (13) du paragraphe II deviendra

$$r = \frac{2q}{1 + \cos(v - \omega)},$$

ou

$$(1) \qquad r = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{v - \omega}{2}\right)}.$$

Pour avoir la position du mobile sur la parabole à un instant donné, reprenons l'équation (5) du paragraphe I, savoir

$$r^2 dv = K dt,$$

et remplaçons-y K par $\sqrt{a\mu(1 - e^2}$ et r par $\frac{p}{1 + e\cos(v - \omega)}$. On aura, en résolvant l'équation résultante par rapport à dt,

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{dv}{[1 + e\cos(v - \omega)]^2},$$

Digitized by Google

et, par conséquent,

$$dt = \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{dv}{[1 + e\cos(v - \omega)]^2}.$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$\operatorname{tang}\frac{v - \omega}{2} = z,$$

d'où

$$\operatorname{tang}(v - \omega) = \frac{2z}{1 - z^2}, \cos(v - \omega) = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, dv = \frac{2dz}{1 + z^2};$$

il en résultera

$$dt = \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{2}(dz + z^2 dz),$$

et, en intégrant, on aura

$$t = \frac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\left(z + \frac{1}{3}z^3\right),$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad t = \frac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\left[\operatorname{tang}\frac{1}{2}(v - \omega) + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{(v - \omega)}{2}\right].$$

Les formules (1) et (2) sont celles dont on fait usage dans la théorie des comètes. La dernière donne facilement t, quand $v - \omega$ est connu. Mais, lorsqu'on veut déterminer l'anomalie vraie par le temps, il faut résoudre l'équation du troisième degré

$$(a) \qquad z + \frac{1}{3}z^3 = \frac{t\sqrt{\mu}}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}},$$

Digitized by Google

équation qui n'est susceptible que d'une seule racine réelle. Pour éviter la résolution de cette équation, on a construit des Tables qui donnent directement l'angle $v - \omega$ pour les différentes valeurs correspondantes de $t\frac{\sqrt{\mu}}{q^{\frac{3}{2}}}$ ou de $\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$. A défaut de ces Tables, on pourrait résoudre l'équation (a) par des essais successifs.

La relation très remarquable qui existe entre les deux rayons vecteurs menés aux extrémités d'un arc elliptique, la corde qui soutend cet arc et le temps employé à le parcourir, a également lieu pour la parabole, et on peut la déduire sans difficulté de la formule (α) du paragraphe qui précède, en supposant dans cette formule $a = \infty$. Par cette supposition, en effet, on trouve

$$\text{arc}\cos z' - \sin(\text{arc}\cos z') = \frac{1}{6a^{\frac{3}{2}}}(\rho + \sigma)^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{arc}\cos z - \sin(\text{arc}\cos z) = \frac{1}{6a^{\frac{3}{2}}}(\rho - \sigma)^{\frac{3}{2}},$$

valeurs qui, étant substituées dans la formule (α), donnent

$$(3) \qquad t_1 = \frac{1}{6}\left[(\rho + \sigma)^{\frac{3}{2}} - (\rho - \sigma)^{\frac{3}{2}}\right].$$

C'est le beau théorème d'Euler dont nous avons parlé plus haut, et que Lambert a généralisé en l'étendant à l'ellipse et à l'hyperbole.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Intégration des équations différentielles du mouvement par la méthode d'Hamilton et de Jacobi.

I. — Principes fondamentaux

Les équations différentielles du mouvement prennent une forme remarquable, et leur intégration se trouve notablement simplifiée, lorsqu'on prend pour point de départ les beaux théorèmes qu'Hamilton et Jacobi ont établi dans leurs recherches sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique. Nous allons voir, en effet, que, lorsqu'on suit la méthode proposée par ces géomètres, les équations différentielles du mouvement sont ramenées au premier ordre et leur intégration à la recherche et à la différentiation d'une seule fonction Θ, satisfaisant à une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire par rapport à ces dérivées.

Le premier théorème que nous allons rappeler se rapporte à la transformation Hamiltonienne des équations du mouvement ; les deux autres concernent l'intégration de ces équations ainsi transformées, ou d'équations plus générales.

Digitized by Google

Dans tout problème de Mécanique où il existe une fonction des forces indépendante du temps et, par conséquent, où le principe des forces vives a lieu, les équations différentielles du mouvement peuvent être ramenées à la forme suivante, due à Hamilton :

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}.$$

H désigne dans ces équations la différence T — U entre la demi-force vive T du système et la fonction des forces U ; q_i sont les variables de la question en fonction desquelles on exprime les coordonnées des divers points du système, et q'_i leurs dérivées prises par rapport au temps t. Enfin p_i désignent de nouvelles variables définies par l'équation

$$p_i = \frac{dT}{dq'_i},$$

et que l'on substitue à celles q'_i, ce qui rend 2T et H fonctions de p_i et de q_i. Quant à la lettre i, elle désigne un nombre entier quelconque au plus égal à k, si k est le nombre des coordonnées q_i.

Ces $2k$ équations différentielles du premier ordre (1), entre les variables p_i et q_i, ont été données pour la première fois par Hamilton dans ses recherches sur la Dynamique (*On a general method Dynamics*, *Trans. philos.* 1834-1835) ; elles ont reçu le nom d'*équations canoniques* du mouvement. Pour qu'elles soient applicables, il faut, comme on le voit, que la fonction U existe réellement ou, ce qui revient au même, qu'il soit possible de former la fonction H.

Dans l'énoncé du théorème qui précède, nous avons admis

Digitized by Google

que les liaisons du système étaient indépendantes du temps; mais cette restriction n'est pas nécessaire, et l'on peut, au lieu du système des $2k$ équations (1), considérer le suivant, qui est plus général :

$$(2) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH_1}{dq_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH_1}{dp_i},$$

H_1, étant une fonction des variables $p_1, p_2 \ldots p_k$; $q_1, q_2 \ldots q_k$, et de t, telle que $H_1(p_k, q_k, t)$. Or, dans ce cas qui comprend en particulier le précédent, Jacobi a fait voir que, si S est une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(a) \quad \frac{dS}{dt} + H_1\left(\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2} \cdots \frac{dS}{dq_k}; q_1, q_2 \cdots q_k, t\right) = 0,$$

c'est-à-dire une solution contenant k constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k$, distinctes de celles que l'on peut toujours introduire dans S par simple addition, les $2k$ intégrales des équations (2) seront

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dq_1} = p_1, \dfrac{dS}{dq_2} = p_2 \cdots \dfrac{dS}{dq_k} = p_k, \\ \dfrac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1, \dfrac{dS}{d\alpha_2} = \beta_2 \cdots \dfrac{dS}{d\alpha_k} = \beta_k, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_k$ désignant k nouvelles arbitraires, qui, avec celles $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, complètent le nombre des constantes que doit donner l'intégration du système des équations proposées.

Lorsqu'on suppose que le principe des forces vives a lieu, auquel cas la fonction U est indépendante du temps, et que de plus on réduit les coordonnées $q_1, q_2, q_3 \ldots$ à celles rectangulaires x, y, z, on satisfait à l'équation aux dérivées

Digitized by Google

partielles (a), en prenant pour S une fonction $\Theta - Ct$, où C désigne une des trois constantes α_1, α_2, α_3, et Θ une fonction de x, y, z indépendante du temps. On a alors

$$\frac{dS}{dt} = -C, \quad \frac{dS}{dx} = \frac{d\Theta}{dx} \cdots \frac{dS}{dC} = \frac{d\Theta}{dC} - t,$$

et l'équation (a) devient

$$(b) \quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2\right] = U + C.$$

Ainsi, dans ce cas qui est celui du système du monde, la question se trouve encore ramenée à la recherche d'une fonction Θ de x, y, z... contenant trois constantes arbitraires α_1, α_2, C, et vérifiant identiquement l'équation (b). Cette fonction trouvée, on a, pour les intégrales premières et pour celles définitives du problème,

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\Theta}{dx} = \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{d\Theta}{dy} = \dfrac{dy}{dt}, \quad \dfrac{d\Theta}{dz} = \dfrac{dz}{dt}, \\ \dfrac{d\Theta}{d\alpha} = \beta_1, \quad \dfrac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \cdots \dfrac{d\Theta}{dC} = t + \tau, \end{array} \right.$$

τ désignant une nouvelle constante arbitraire.

II. — Réduction des équations du mouvement elliptique a la forme canonique et intégration de ces équations.

Lorsqu'on fait abstraction de toute force perturbatrice, on a $R = 0$ et les équations différentielles du mouvement se ré-

Digitized by Google

duisent aux suivantes :

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{\mu z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Afin de ramener ces équations à la forme canonique, posons, conformément à ce qui précède,

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \qquad \frac{dy}{dt} = y_1, \qquad \frac{dz}{dt} = z_1$$

$$U = \frac{\mu}{r}, \qquad T = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2);$$

il en résultera

$$H = T - U = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \frac{\mu}{r},$$

et, par suite, le système (D) pourra être remplacé par le suivant qui est du premier ordre :

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dH}{dx_1}, & \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dx}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dH}{dy_1}, & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dy}, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dH}{dz_1}, & \dfrac{dz_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dz}. \end{cases}$$

La fonction des forces U ne contenant pas le temps t, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, de laquelle

Digitized by Google

dépend la solution du problème, est

$$(1)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2=2\left(\frac{\mu}{r}+C\right);$$

et, conformément à ce que nous venons de dire, il s'agira d'abord de trouver une intégrale générale de cette équation renfermant deux constantes arbitraires K et G.

Nous commencerons par transformer cette équation (1), en prenant, au lieu des variables x, y, z, celles r, ψ, φ, liées aux premières par les relations

$$(2)\quad x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\cos\varphi\sin\psi,\quad z=r\sin\varphi.$$

r est la distance de la planète au Soleil ou son rayon vecteur, ψ sa longitude et φ sa latitude. On suppose que le plan des xy est le plan de l'écliptique et que l'axe des x est la ligne des équinoxes.

Les équations de la transformation sont alors

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{y}{x},$$

$$\sin\varphi=\frac{z}{r},$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

et l'on a

$$\frac{d\Theta}{dx}=\frac{d\Theta}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{d\Theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\Theta}{d\psi}\frac{d\psi}{dx},$$

$$\frac{d\Theta}{dy}=\frac{d\Theta}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{d\Theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\Theta}{d\psi}\frac{d\psi}{dy},$$

$$\frac{d\Theta}{dz}=\frac{d\Theta}{dr}\frac{dr}{dz}+\frac{d\Theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d\Theta}{d\psi}\frac{d\psi}{dz}.$$

Digitized by Google

En différentiant les équations (2), on en déduit

$$dx = dr \cos\varphi \cos\psi - r \sin\varphi \cos\psi \, d\varphi - r \cos\varphi \sin\psi d\psi,$$
$$dy = dr \cos\varphi \sin\psi - r \sin\varphi \sin\psi \, d\varphi + r \cos\varphi \cos\psi d\psi,$$
$$dz = dr \sin\varphi + r \cos\varphi \, d\varphi;$$

d'où, en résolvant par rapport à dr, $d\psi$ et $d\varphi$,

$$dr = \cos\varphi \cos\psi dx + \cos\varphi \sin\psi dy + \sin\varphi dz,$$
$$d\varphi = \frac{-\sin\varphi \cos\psi dx - \sin\varphi \sin\psi dy + \cos\varphi dz,}{r}$$
$$d\psi = \frac{\cos\psi dy - \sin\psi dx}{r \cos\varphi}.$$

On a donc

$$\frac{d\Theta}{dx} = \cos\varphi \cos\psi \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\sin\varphi \cos\psi}{r} \frac{d\Theta}{d\varphi} - \frac{\sin\psi}{r \cos\varphi} \frac{d\Theta}{d\psi},$$
$$\frac{d\Theta}{dy} = \cos\varphi \sin\psi \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\sin\varphi \sin\psi}{r} \frac{d\Theta}{d\varphi} + \frac{\cos\psi}{r \cos\varphi} \frac{d\Theta}{d\psi},$$
$$\frac{d\Theta}{dz} = \sin\varphi \frac{d\Theta}{dr} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{d\Theta}{d\varphi}.$$

Ainsi, la transformée de l'équation (1) est

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Theta}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\left(\frac{d\Theta}{d\psi}\right)^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right).$$

Posons maintenant

$$\Theta = f(r) + f_1(\varphi) + f_2(\psi),$$

f, f_1, f^2 étant des caractéristiques de fonction; il est clair qu'on aura

$$(5) \quad f'^2(r) + \frac{1}{r^2} f_1'^2(\varphi) + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi} f_2'^2(\psi) = 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right).$$

Digitized by Google

les accents désignant les dérivées de chacune de ces fonctions par rapport à la variable qu'elle contient.

On peut satisfaire à cette équation, comme il est aisé de s'en assurer, en prenant

$$f_2'(\psi)=\mathrm{H},\quad f_1'^2(\varphi)+\frac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi},=\mathrm{G}^2,\quad f_1'^2(r)=2\left(\frac{\mu}{r}+\mathrm{C}\right)-\frac{\mathrm{G}^2}{r^2},$$

ce qui donne par l'intégration

$$f_2(\psi)=\mathrm{H}\psi,\qquad \begin{aligned} f_1(\varphi)&=\int_0^{\varphi}\sqrt{\mathrm{G}^2-\frac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi,\\ f(r)&=\int_{r_0}^{r}\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+\mathrm{C}\right)-\frac{\mathrm{G}^2}{r^2}}\,dr.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation

$$\Theta=f(r)+f_1(\varphi)+f_2(\psi)$$

ou celle-ci

$$\Theta=\mathrm{H}\psi+\int_0^{\varphi}\sqrt{\mathrm{G}^2-\frac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi+\int_{r_0}^{r}\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+\mathrm{C}\right)-\frac{\mathrm{G}}{r^2}}\,dr,$$

est la solution complète de l'équation aux dérivées partielles (4).

Les équations intégrales du problème sont dès lors, en désignant par h, g, c, trois nouvelles constantes arbitraires,

$$(6)\qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{H}}=h,\qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{G}}=g,\qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}}=t+c,$$

Digitized by Google

et l'on peut écrire

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{dH} = h = \psi - H\displaystyle\int_0^{\varphi} \dfrac{\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\sqrt{G^2 - \dfrac{H^2}{\cos^2\varphi}}}, \\[2ex] \dfrac{d\Theta}{dG} = g = G\displaystyle\int_0^{\varphi} \dfrac{d\varphi}{G^2 - \dfrac{H^2}{\cos^2\varphi}} - G\int_{r_0}^{r} \dfrac{\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\left(\dfrac{\mu}{r} + C\right) - \dfrac{G^2}{r^2}}}, \\[2ex] \dfrac{d\Theta}{dC} = t + c = \displaystyle\int_{r_0}^{r} \dfrac{dr}{2\left(\dfrac{\mu}{r} + C\right) - \dfrac{G^2}{r^2}}. \end{cases}$$

III. — Interprétation des constantes H, G, C, h, g, c.

Les intégrales (7) renferment six constantes ou *éléments canoniques* H, G, C, h, g, c, dont il est bien facile de trouver la signification.

En effet, on a d'abord, pour les composantes de la vitesse suivant les axes des coordonnées,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\Theta}{dx}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d\Theta}{dy}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{d\Theta}{dz},$$

et, par conséquent, pour les équations des aires sur les plans de xy et des zx,

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = x\frac{d\Theta}{dy} - y\frac{d\Theta}{dx},$$

$$\frac{ydz - zdy}{dt} = y\frac{d\Theta}{dz} - z\frac{d\Theta}{dy},$$

$$\frac{zdx - xdz}{dt} = z\frac{d\Theta}{dx} - x\frac{d\Theta}{dz}.$$

Digitized by Google

En exprimant $\frac{d\Theta}{dx}, \frac{d\Theta}{dy}, \frac{d\Theta}{dz}$ et x, y, z, en fonction de r, φ, ψ, on trouve

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{xdy - ydx}{dt} = \dfrac{d\Theta}{d\psi} = \mathrm{H}, \\[2ex] \dfrac{ydz - zdy}{dt} = \sin\psi \sqrt{\mathrm{G}^2 - \dfrac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi}} - \mathrm{H}\cos\psi \operatorname{tang}\varphi, \\[2ex] \dfrac{zdx - xdz}{dt} = -\cos\psi \sqrt{\mathrm{G}^2 - \dfrac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi}} - \mathrm{H}\sin\psi \operatorname{tang}\varphi, \end{cases}$$

équations qui, étant élevées au carré, puis ajoutées ensemble, donnent

$$(9)\quad \left[\frac{1}{dt^2}(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{G}.$$

Par conséquent, H est la constante des aires dans le plan des xy, et G la constante des aires dans le plan de l'orbite. Quant à la constante C, elle n'est autre que celle qui entre dans l'équation des forces vives.

Il nous reste à définir h, g, c. Or, si dans la première des équations (7) on fait $\varphi = 0$, on a

$$h = \psi;$$

ainsi h est la *longitude du nœud.*

La seconde des équations (7) donne

$$g = \mathrm{G}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathrm{G}^2 - \dfrac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi}}} - \mathrm{G}\int_{r_0}^{r} \frac{\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\left(\dfrac{\mu}{r} + \mathrm{C}\right) - \dfrac{\mathrm{G}^2}{r^2}}}$$

$$= \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{G}\sin\varphi}{\sqrt{\mathrm{G}^2 - \mathrm{H}^2}}\right) + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\dfrac{\mathrm{G}^2}{\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2\mathrm{CG}^2}{\mu^2}}}\right);$$

Digitized by Google

et si, pour éliminer *arc sin* et *arc cos*, on pose

$$(10) \qquad \zeta = \operatorname{arc\,sin} \frac{G \sin \varphi}{\sqrt{G^2 - H^2}},$$

d'où

$$(11) \begin{cases} \sin \zeta = \dfrac{G \sin \varphi}{\sqrt{G^2 - H^2}}, \\ \cos \zeta = \cos \varphi \dfrac{\sqrt{G^2 - \dfrac{H^2}{\cos^2 \varphi}}}{\sqrt{G^2 - H^2}}, \quad \operatorname{tang} \zeta = \dfrac{G \operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{G^2 - \dfrac{H^2}{\cos^2 \varphi}}}, \end{cases}$$

on obtient

$$g - \zeta = \operatorname{arc\,cos} \frac{\dfrac{G^2}{\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2CG^2}{\mu^2}}},$$

c'est-à-dire

$$\cos(\zeta - g) = \frac{\dfrac{G^2}{\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2CG^2}{\mu^2}}}.$$

On a donc, en résolvant par rapport à r,

$$(12) \qquad r = \frac{\dfrac{G^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2CG^2}{\mu^2}} \cos(\zeta - g)},$$

équation d'une section conique dont un des foyers occupe le centre du Soleil et qui représente une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que C est négatif, nul ou positif.

En éliminant $G^2 - \dfrac{K^2}{\cos^2 \varphi}$ entre cette équation (12) et la

Digitized by Google

seconde des équations (11), on trouve

$$(13) \qquad \cos\zeta = \cos\varphi \cos(\psi - h).$$

Mais, en désignant par P la projection de m sur la sphère, et par ☊ le nœud ascendant, on a évidemment

$$\psi - h = \Upsilon P - \Upsilon ☊ = ☊P;$$

par conséquent, $\zeta = m☊$ est la longitude de la planète comptée dans le plan de l'orbite à partir du nœud ☊.

Si l'on remarque maintenant que le minimum de r a lieu pour $\zeta = g$, on voit que g est la valeur de ζ qui correspond à la moindre distance de la planète au Soleil ; c'est donc la *longitude du périhélie* comptée dans le plan de l'orbite à partir du nœud ascendant. Quant à la différence $\zeta - g$, il est aisé de voir que c'est l'*anomalie vraie* de la planète.

Cherchons encore la signification de la constante c. On a par la troisième des équations (7)

$$(14)\begin{cases} t + c = \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + C\right) - \frac{G^2}{r^2}}} \\ = \dfrac{1}{2C}\sqrt{2(\mu r + Cr^2) - G^2} - \dfrac{\mu}{2C\sqrt{-2C}} \operatorname{arc\,cos} \dfrac{2Cr + \mu}{\sqrt{2CG^2 + \mu^2}}; \end{cases}$$

et si, pour éliminer *arc cos*, on pose (u désignant l'anomalie excentrique)

$$(15) \qquad \cos u = \frac{2Cr + \mu}{\sqrt{2CG^2 + \mu^2}},$$

on aura

$$(16) \quad \sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{\frac{-2C}{2CG^2 + \mu^2}}\sqrt{2(\mu r + Cr^2) - G^2},$$

Digitized by Google

et, par suite, l'équation (14) deviendra

$$(17) \qquad u - \sqrt{1 + \frac{2CG^2}{\mu^2}} \sin u = \frac{(-2C)^{\frac{3}{2}}}{\mu}(t + c).$$

Faisant dans cette équation $u = 0$, on en conclut $t = -c$; par conséquent la constante $-c$ est la valeur du temps qui correspond au passage de la planète par le périhélie.

Les équations (12) (15) et (16) que nous venons d'établir déterminent complètement la position de la planète dans son orbite : car u étant donné en fonction de t par l'équation (16), on aura r en fonction de u et par suite en fonction de t, au moyen de l'équation

$$(18) \qquad r = \frac{\mu}{-2C}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2CG^2}{\mu^2}} \cos u\right),$$

qui se déduit aisément des relations (15) et (16). ζ étant donné, du reste, en fonction de r par l'équation (12), on voit que la position de la planète dans son orbite se trouvera déterminée à chaque instant par les équations (12) (16) et (18).

Si l'on observe actuellement que, d'après la nature de l'orbite décrite, on a

$$(19) \quad e = \sqrt{1 + \frac{2CG^2}{\mu^2}}, \quad p = \frac{G^2}{\mu} = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2),$$

d'où

$$(20) \qquad a = \frac{\mu}{-2C},$$

p étant le paramètre de l'ellipse et b son demi-petit axe, il est clair qu'on pourra mettre les équations (17) et (18) sous la

Digitized by Google

forme suivante

$$u - e \sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t + c) = n(t + c), \; r = a(1 - e \cos u),$$

n désignant le moyen mouvement de la planète, lequel est aussi égal à

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{(-2C)^{\frac{3}{2}}}{\mu}.$$

IV. — Relations qui lient les constantes canoniques aux éléments elliptiques.

Il nous reste à établir les relations qui existent entre les constantes canoniques G, H, C, g, h, c provenant de l'intégration des équations transformées (E), et celles usuelles introduites dans les formules du mouvement elliptique par l'intégration du système ordinaire (D).

Si l'on égale à zéro le radical $G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}$, on a la plus grande valeur de l'angle φ, c'est-à-dire l'inclinaison i du plan de l'orbite ; on a donc

$$H = G \cos i,$$

d'où résulte

$$\cos i = \frac{H}{G},$$

et par conséquent

$$i = \arccos \frac{H}{G}.$$

Digitized by Google

On a d'ailleurs

$$\theta = h, \qquad \omega = h + g,$$

et d'autre part

$$\varepsilon - \omega = nc;$$

ainsi

$$\varepsilon = nc + \theta = nc + h + g = \chi + h + g,$$

en posant $nc = \chi$.

D'après cela, on voit que les relations qui lient les éléments canoniques G, H, C, g, h, c à ceux elliptiques $a, e, \theta, i, \varepsilon, \omega$, sont :

$$(21)\begin{cases} H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, & h = \theta, \\ G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & g = \omega - h = \omega - \theta, \\ C = -\dfrac{\mu}{2a}, & \chi = nc = \varepsilon - \omega. \end{cases}$$

Inversement on aurait

$$(22)\begin{cases} \theta = h, & \omega = h + g, \\ a = -\dfrac{\mu}{2C}, & e = \dfrac{\sqrt{1 + 2CG^2}}{\mu^2}, \\ i = \arccos\dfrac{H}{G}, & \varepsilon = \chi + h + g. \end{cases}$$

Digitized by Google

CHAPITRE IV

Développement en séries des coordonnées qui fixent la position d'une planète dans son orbite elliptique

---

I. — Expressions des coordonnées polaires r et v en fonction du temps.

Les coordonnées r et v déterminées par les formules (14) et (21) du paragraphe III, chapitre II, font connaître la position d'une planète dans son orbite à un instant quelconque t, lorsque pour cet instant u est connu. Il s'agit donc tout d'abord d'obtenir u. Mais l'équation (18) qui l'exprime étant transcendante, il est impossible, en général, d'avoir son expression sous forme finie, et c'est à un développement en série que l'on est obligé d'avoir recours. Voici le moyen que l'on emploie ordinairement pour y parvenir.

On a

$$u = nt + e \sin u,$$

et comparant cette équation avec celle

$$z = x + ef(x)$$

Digitized by Google

dont le développement, dû à Lagrange, est

$$(a)\quad z = x + ef(x) + \frac{e^2}{1.2}\frac{df(x)^2}{dx} + \ldots + \frac{e^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)^n + ,$$

on en déduit, en faisant $z = u$, $x = nt$, $f(x) = \sin x$ (et laissant x pour plus de simplicité),

$$u = x + e\sin x + \frac{e^2}{1.2}\frac{d\sin^2 x}{dx} + \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2\sin^3 x}{dx^2} + \ldots$$
$$+ \frac{e^m}{1.2..m}\frac{d^{m-1}\sin^m x}{dx^{m-1}} + \ldots$$

Mais on a

$$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1,$$
$$2^2\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x,$$
$$2^3\sin^4 x = +\cos 4x - 4\cos 2x + 3,$$
$$2^4\sin^5 x = +\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x,$$
$$2^5\sin^6 x = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10,$$

. . . . . .

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \sin 2x, \qquad \frac{d^2\sin^3 x}{dx^2} = \frac{3^2\sin 3x - 3\sin x}{2^2};$$

$$\frac{d^3\sin^4 x}{dx^3} = 2^3\sin 4x - 4\sin 2x,$$

$$\frac{d^4\sin^5 x}{dx^4} = 5^4\sin 5x - 53^4\sin 3x + 10\sin x,$$

$$\frac{d^5\sin^6 x}{dx^5} = 3^5\sin 6x - 62^5\sin 4x + 3.5\sin 2x,$$

. . . . . .

On a donc, par la substitution de ces valeurs dans l'équation

Digitized by Google

précédente, et après avoir remplacé x par nt,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u = nt &+ e \sin nt \\ &+ \frac{e^2}{2} \sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{2^3}(3 \sin 3nt - \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{1.2.3.}(2 \sin 4nt - \sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^7.3}(5^3 \sin 5nt - 3^4 \sin 3nt + 2 \sin nt) \\ &+ \frac{e^6}{2^4 3.5.}(3^4 \sin 6nt - 2^6 \sin 4nt + 5 \sin 2nt) + \ldots \end{aligned}\right.$$

L'angle u étant déterminé en fonction de t par cette formule, on aura les valeurs correspondantes de r et de v à l'aide des relations (14) et (21) du chapitre III. Mais il est préférable, surtout lorsque les excentricités sont petites, d'exprimer r et v de la même manière que u, c'est-à-dire par des séries procédant suivant les puissances de e et qui soient des fonctions explicites du temps. Voyons donc comment on peut exprimer r et v sans passer par le calcul de u.

On a

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u.$$

Posons

$$F(x) = 1 - e \cos x,\ F'(x) = e \sin x,\ f(x) = \sin x,\ x = nt.$$

Alors, par la formule connue

$$(b)\qquad F(z) = F(x) + e F'(x) f(x) + \frac{e^2}{1.2}\frac{d[F'(x) f(x)^2]}{dx} + \frac{e^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[F'(x) f(x)^n\right],$$

on en déduira

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos x + e^2 \sin^2 x \pm \frac{e^3}{2}\frac{d \sin^3 x}{dx} + \frac{e^4}{2.3}\frac{d^2 \sin^4 x}{dx^2} + \ldots.$$

Digitized by Google

Mais

$$\sin^2 x = -\frac{\cos 2x + 1}{2}, \quad \frac{d\sin^3 x}{dx} = -\frac{3\cos 3x + 3\cos x}{2^2},$$

$$\frac{d^2 \sin^4 x}{dx^2} = -2\cos 4x + 2\cos 2x,$$

$$\frac{d^3 \sin^5 x}{dx^3} = -\frac{5^3 \cos 5x + 53^3 \cos 3x - 52 \cos 2x}{2^4};$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente et remplaçant x par nt, on aura donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 &- e\cos nt \\ &- \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) \\ &- \frac{e^3}{2^3}(3\cos 3nt - 3\cos nt) \\ &- \frac{e^4}{3}(\cos 4nt - \cos 2nt) \\ &- \frac{e^5}{2^7.3}(5^3 \cos nt - 53^3 \cos 3nt + 52 \cos nt) \\ &- \frac{e^6}{2^4.5}(3^3 \cos 6nt - 2^5 \cos 4nt + 5\cos 2nt) - \ldots \end{aligned} \right.$$

Il nous reste à exprimer v en fonction de t. Or si l'on écrit l'équation (21), chapitre II, de cette manière :

$$\frac{\sin \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\sin \frac{1}{2} u}{\cos \frac{1}{2} u},$$

et que, dans cette dernière, on remplace les sinus et cosinus par leurs valeurs en exponentielles imaginaires, on aura, ε désignant la base du système de logarithmes népériens.

$$\frac{\varepsilon^{v\sqrt{-1}} - 1}{\varepsilon^{v\sqrt{-1}} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\varepsilon^{u\sqrt{-1}} - 1}{\varepsilon^{u\sqrt{-1}} + 1}.$$

Digitized by Google

Posons

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}};$$

il en résultera

$$\varepsilon^{v\sqrt{-1}} = \varepsilon^{u\sqrt{-1}} \frac{1 - \lambda \varepsilon^{-u\sqrt{-1}}}{1 - \lambda \varepsilon^{u\sqrt{-1}}},$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres, on aura

$$v = u + \frac{\log\left(1 - \lambda \varepsilon^{-u\sqrt{-1}}\right) - \log\left(1 - \lambda \varepsilon^{u-\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}},$$

expression d'où l'on tire, en développant les logarithmes et remplaçant les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sinus et cosinus,

$$v = u + 2\left(\lambda \sin u + \frac{\lambda^2}{2} \sin 2u + \frac{\lambda^3}{3} \sin 3u + \ldots\right).$$

Maintenant, on a

$$u = nt + e \sin u,$$

$$\sin u = \frac{u - nt}{e} = \sin nt + \frac{e}{2} \sin 2nt + \frac{e^2}{2^3}(3 \sin 3nt - \sin nt) + \ldots$$

On a ensuite

$$\sin 2u = \sin 2nt + e(\sin 3nt - \sin nt) + e^2(\sin 4nt - \sin 2nt) + \frac{e^3}{2^3.3}(4 \sin nt - 27 \sin 3nt + 25 \sin 5nt) + \ldots$$

$$\sin 3u = \sin 3nt + \frac{e}{2}(3 \sin 4nt - 3 \sin 2nt) + \frac{e^2}{2^3}(15 \sin 5nt - 18 \sin 3nt + 3 \sin nt) + \frac{e^3}{4}(9 \sin 6nt - 12 \sin 4nt + 3 \sin 2nt) + \ldots$$

Digitized by Google

D'un autre côté, la formule de Lagrange [formule (b)] donne en posant

$$1+\sqrt{1-e^2}=\alpha, \text{ d'où } \alpha=2-\frac{e^2}{\alpha}, \text{ et } z=\alpha;$$

$$\varpi=2, \quad e=e^2, \quad F(z)=\frac{1}{a^i}=\frac{1}{z^i},$$

$$\frac{1}{z^i}=\frac{1}{2^i}+\frac{ie^2}{2^{i+2}}+\frac{i(i+3)}{1.2}\frac{e^4}{2^{i+4}}+\frac{i(i+4)(i+5)}{1.2.3}\frac{e^6}{2^{i+6}}+\ldots\ldots$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\lambda=\frac{e}{\alpha}=\frac{e}{z}$,

$$\lambda^i=\frac{e^i}{2^i}+\frac{i}{2^{i+2}}e^{i+2}+\frac{i(i+3)}{2.2^{i+4}}e^{i+4}+\frac{i(i+4)(i+5)}{2.3.2^{i+6}}e^{i+6}+\ldots$$

D'après cela, et en bornant l'approximation aux termes qui sont du sixième ordre par rapport à e, on aura donc

$$(3)\quad \begin{cases} v=nt+2e\sin nt \\ \qquad +\frac{5}{4}e^2\sin 2nt \\ \qquad +\frac{e^3}{2^2.3}(13\sin 3nt-3\sin nt) \\ \qquad +\frac{e^4}{2^5 3}(103\sin 4nt-44\sin 2nt) \\ \qquad +\frac{e^5}{2^6.3.5}(1097\sin 5nt-645\sin 3nt+50\,nt)+\ldots \end{cases}$$

Digitized by Google

$v - nt$ ou la suite des termes $2e \sin nt + \frac{5}{4} e^2 \sin 2nt + \ldots$ est ce que les astronomes sont convenus d'appeler l'*équation du centre ;* c'est, comme l'on voit, la quantité qu'il faut ajouter à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie v.

Si, au lieu de compter l'angle v du périhélie, on fixe son origine à un point quelconque de l'orbite, et si, de plus, on prend pour origine du temps un instant quelconque après le passage de la planète au périhélie, il faudra, d'après les remarques que nous avons faites à la page 62, remplacer, dans les expressions (2) et (3), v par $v - \omega$ et nt par $nt + \varepsilon - \omega$; et ces expressions deviendront alors, en représentant ce dernier angle par ζ et ordonnant par rapport à cette quantité,

$$\ldots \quad (4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 &+ \frac{1}{2} e^2 \\ &- \left(e - \frac{3}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 - \frac{7}{9216} e^7\right) \cos \zeta \\ &- \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} e^4 + \frac{1}{16} e^6\right) \cos 2\zeta \\ &- \left(\frac{3}{8} e^3 - \frac{45}{128} e^5 + \frac{567}{5120} e^7\right) \cos 3\zeta \\ &- \left(\frac{1}{3} e^4 - \frac{2}{5} e^6\right) \cos 4\zeta \\ &- \left(\frac{125}{384} e^5 - \frac{4375}{9216} e^7\right) \cos 5\zeta \\ &- \frac{27}{80} e^6 \cos 6\zeta \\ &- \frac{16807}{46080} e^7 \cos 7\zeta. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
v = {} & nt + \varepsilon \\
& + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4068}e^7\right)\sin\zeta \\
& + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2\zeta \\
& + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7\right)\sin 3\zeta \\
& + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4\zeta \\
& + \left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5967}{4608}e^7\right)\sin 5\zeta \\
& + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6\zeta \\
& + \frac{47273}{32256}e^7 \cos 7\zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, dans la formule (b), on pose

$$F(x) = (1 - e\cos x)^i, \quad f(x) = \sin x, \quad x = nt,$$

on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{r^i}{a^i} = {} & (1 - e\cos x)^i \\
& + ie^2 \sin^2 x\,(1 - e\cos x)^{i-1} \\
& + \frac{ie^3}{1.2}\frac{d\sin^3 x}{dx}(1 - e\cos x)^{i-1} \\
& + \frac{ie^4}{1.2.3.}\frac{d^2\sin^4 x}{dx^2}(1 - e\cos x)^{i-1} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{ie^n}{1.2.3\ldots n-2}\frac{d^{n-2}\sin^n x}{dx^{n-2}}(1 - e\cos x)^{i-1}.
\end{aligned}
$$

Remplaçant dans cette dernière x par nt, et effectuant les

Digitized by Google

différentiations, puis faisant $nt + \varepsilon - \omega = \zeta$, on en conclura aisément

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{a^2} &= 1 + \frac{3}{2}e^2 \\
&\quad - \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{1}{96}e^5\right)\cos\zeta \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4\right)\cos 2\zeta \\
&\quad - \left(\frac{1}{4}e^3 - \frac{9}{64}e^5\right)\cos 3\zeta \\
&\quad - \frac{1}{6}e^4\cos 4\zeta \\
&\quad - \frac{25}{192}e^5\cos 5\zeta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r^3}{a^3} &= 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \\
&\quad - \left(3e + \frac{9}{8}e^3 - \frac{15}{64}e^5\right)\cos\zeta \\
&\quad - \frac{5}{8}e^4\cos 2\zeta \\
&\quad + \left(\frac{1}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5\right)\cos 3\zeta \\
&\quad + \frac{1}{8}e^4\cos 4\zeta \\
&\quad + \frac{15}{128}e^5\cos 5\zeta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r^4}{a^4} &= 5e + \frac{15}{8}e^4 \\
&\quad - (4e + e^2)\cos\zeta \\
&\quad + e\cos 2\zeta.
\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres puissances de $\frac{r}{a}$.

Digitized by Google

II. — Autre forme du développement de r et de v.

Les formules qui expriment sous forme finie les valeurs de r, nt et v au moyen de la variable auxiliaire u, sont susceptibles de se développer en séries de sinus et de cosinus des multiples de l'anomalie moyenne nt, et l'on peut toujours représenter leurs coefficients par des intégrales définies. Ces intégrales se résolvent elles-mêmes en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de l'excentricité, et sont d'autant plus convergentes que cette fraction est plus petite. En les appliquant au cas des anciennes planètes pour lesquelles e n'excède pas 0,20560, on trouve pour les coefficients de r et de v des valeurs numériques qui coïncident exactement avec celles que nous avons déduites du théorème de Lagrange. Il semblerait donc, d'après cela, que cette méthode n'eût pas dans la solution du problème qui nous occupe une grande importance ; car la détermination de ces coefficients a été, de nos jours, effectuée avec beaucoup de soin et le calcul en a été poussé aussi loin que le comportent les applications astronomiques. Cependant, comme la méthode dont nous parlons peut s'étendre aux coordonnées de deux ou d'un plus grand nombre de planètes, et que, dans ce cas, elle fournit un procédé très remarquable pour la détermination des coefficients du développement de la fonction R, nous allons l'exposer ici avec tous les détails convenables.

Considérons les trois fonctions $u - nt$, $\frac{r}{a}$, $v - nt$, dont les valeurs, sous forme finie, sont représentées par les équations

Digitized by Google

(14) (18) et (21) du mouvement elliptique, et posons

$$(1)\begin{cases} u - nt = A_1 \sin nt + A_2 \sin 2nt + \ldots + A_i \sin int + \ldots, \\ \frac{r}{a} = B_0 + B_1 \cos nt + B_2 \cos 2nt + \ldots + B_i \cos int + \ldots, \\ v - nt = C_1 \sin nt + C_2 \sin 2nt + \ldots + C_i \sin int + \ldots, \end{cases}$$

A_i, B_i, C_i étant des coefficients indépendants de nt, qu'il s'agit de déterminer.

Si l'on désigne par i et i' deux nombres entiers quelconques, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura, en effectuant l'intégration entre les limites o et π,

$$\int_0^\pi \cos i\, nt \cos i'\, nt\, dnt = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin i\, nt \sin i'\, nt\, dnt = 0,$$

dans le cas où i et i' sont inégaux; et

$$\int_0^\pi \cos^2 int\, dnt = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin^2 int\, dnt = \frac{1}{2}\pi,$$

dans le cas de $i = i'$. Pour $i = 0$, la première de ces dernières intégrales se réduit à π et la seconde à zéro.

Maintenant, si l'on multiplie la première et la troisième des équations (1) par sin $intdnt$ et la seconde par cos $intdnt$, puis qu'on intègre les deux membres, depuis $nt = 0$ jusqu'à

Digitized by Google

$nt = \pi$, il n'est pas difficile de voir que tous les termes des seconds membres, à l'exception de ceux qui ont A_i, B_i ou C_i pour coefficients, s'évanouiront, et qu'ainsi on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(u - nt)\sin i\,nt\,dnt,\\ B_i &= \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} r\cos i\,nt\,dnt,\\ C_i &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(v - nt)\sin i\,nt\,dnt.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier de $i = 0$, on a

$$(3)\qquad B_0 = \frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi} r\,dnt,$$

valeur qui n'est que la moitié de celle que l'on déduirait de l'expression de B_i.

On peut simplifier les intégrales (2), en prenant pour variable indépendante u au lieu de nt, et appliquant le principe de l'intégration par parties.

Considérons d'abord la seconde qui ne renferme que r, nt, et dnt. Les valeurs de ces quantités sont

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= a\,(1 - e\cos u),\\ nt &= u - e\sin u,\\ dnt &= (1 - e\cos u)du,\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

et, en les substituant dans l'expression de B_i, on obtient

$$(4) \qquad B_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - e \cos u)^2 \cos i (u - e \sin u)\, du.$$

Cette formule se simplifie encore par l'intégration et devient

$$(5) \qquad B_i = \frac{2e}{i\pi} \int_0^{\pi} \sin i (u - e \sin u) \sin u du.$$

Dans le cas de $i = 0$, on a

$$(6) \qquad B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - e \cos u)^2\, du = 1 + \frac{1}{2} e^2,$$

en ne prenant que la moitié seulement de l'intégrale (4). C'est le seul des coefficients A_i, B_i, C_i, qui puisse être obtenu de cette manière, c'est-à-dire sous forme finie.

En intégrant par parties les expressions de A_i et de C_i, et observant que $u - nt$ et $v - nt$ sont nuls aux deux limites $nt = 0$ et $nt = \pi$, on aura

$$A_i = \frac{2}{i\pi} \int_0^{\pi} \cos i\, nt \frac{du}{dnt}\, dnt - \frac{2}{i\pi} \int_0^{\pi} \cos i\, nt\, dnt,$$

$$C_i = \frac{2}{i\pi} \int_0^{\pi} \cos i\, nt \frac{dv}{dnt}\, dnt - \frac{2}{i\pi} \int_0^{\pi} \cos i\, nt\, dnt,$$

Digitized by Google

ou, à cause que l'intégrale du second terme est toujours nulle,

$$A_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^{\pi} \cos i\,nt \frac{du}{dnt}\,dnt,$$

$$C_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^{\pi} \cos i\,nt \frac{dv}{dnt}\,dnt.$$

On a d'ailleurs, par la différentiation de l'équation (21) du § III, chapitre II,

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}.$$

Faisant à l'aide de cette valeur et de celles (a) les substitutions indiquées, on obtient, pour les expressions de A_i et de C_i,

$$(7) \qquad A_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^{\pi} \cos i\,(u - e\sin u)\,du,$$

$$(8) \qquad C_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{i\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos i\,(u - e\sin u)}{1-e\cos u}\,du;$$

car les limites de u sont les mêmes que celles de nt.

En différentiant l'expression de A_i par rapport à e, on obtient

$$\frac{dA_i}{de} = \frac{2}{i\pi}\int_0^{\pi} \sin i\,(u - e\sin u)\sin u\,du,$$

Digitized by Google

résultat qui, étant rapproché de celui (5), conduit à la relation

$$(9) \qquad B_i = -\frac{e}{i}\frac{dA_i}{de}.$$

Ainsi, on peut faire dépendre la valeur de B_i de celle de A_i et de ses dérivées par rapport à e.

Digitized by Google

LIVRE II

SECONDE APPROXIMATION DU MOUVEMENT HÉLIOCENTRIQUE DES PLANÈTES. — THÉORIE DU MOUVEMENT TROUBLÉ.

CHAPITRE I

Méthode de la variation des constantes arbitraires pour l'intégration des équations du mouvement troublé.

I. — Considérations préliminaires. — Divers ordres d'approximation par rapport aux masses.

La détermination du mouvement des planètes autour du Soleil dépend, d'après ce que nous avons dit au paragraphe III du Chapitre I, de l'intégration des équations différentielles (C) et des équations semblables relatives aux corps m' m''... Mais, dans l'état actuel de l'analyse, cette intégration en termes finis est impossible, et l'on est obligé d'avoir recours à des approximations. La constitution de notre système planétaire, nous l'avons dit, offre pour cela cet avantage précieux que, les masses planétaires étant très petites par rapport à celle du Soleil, la fonction R dépendante de l'ordre des masses se trouve être une très petite quantité par rapport à celle $\frac{\mu}{r^3}$ et peut, dans une *première approximation*, être négligée. Les formules qui en résultent sont alors celles du mouvement

Digitized by Google

elliptique, et l'on peut, en partant de ces formules, parvenir à celles qui expriment le mouvement troublé, soit en cherchant à déterminer les corrections que doivent subir ces premières valeurs des coordonnées pour représenter le mouvement varié, méthode qui est celle employée généralement par Laplace dans la *Mécanique céleste*, soit en regardant l'orbite de la planète troublée comme une ellipse dont les éléments varient à chaque instant par l'effet des forces perturbatrices, et cherchant à déterminer ces variations par l'emploi de la *méthode de la variation des constantes arbitraires* que l'on doit à Lagrange. Lorsqu'on suit cette marche, qui est à la fois la plus simple et la plus naturelle, on est aisément conduit par l'intégration aux valeurs finies des variations δa, δe, $\delta \varepsilon$... des éléments elliptiques, et, ajoutant ces valeurs finies à ces mêmes éléments ou *constantes arbitraires*, on en conclut celles qui conviennent au mouvement troublé ou $a + \delta a$, $e + \delta e$... En général, les quadratures d'où dépendent les variations δa, δe... ne peuvent pas s'effectuer exactement; mais on peut toujours les obtenir par des approximations successives. Pour cela, on commence par n'avoir égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices, et l'on est ainsi conduit à une première valeur approchée de ces éléments devenus variables. A l'aide des valeurs résultant de cette *seconde approximation*, on en obtient une troisième dans laquelle il est tenu compte des carrés et des produits des forces perturbatrices, et continuant de la sorte, on parvient à des valeurs de δa, δe, $\delta \varepsilon$... aussi approchées qu'on le désire, et l'on arrive par suite à connaître, pour chaque instant donné, le lieu de l'astre dans son orbite avec toute la précision que les observations comportent.

Digitized by Google

II. — Principe sur lequel repose la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Considérons une planète m en mouvement autour du Soleil. Les équations différentielles du mouvement dans le cas d'une orbite elliptique ou d'une orbite troublée seront, comme l'on sait, les suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{dR}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{dR}{dy}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{dR}{dz},$$

R désignant la fonction des forces perturbatrices et $\frac{dR}{dx}, \frac{dR}{dy}, \frac{dR}{dz}$ étant les composantes de ces forces dirigées suivant les trois axes des coordonnées. Nous avons déjà dit que ces forces sont très petites par rapport à celle $\frac{\mu}{r^3}$ qui produit le mouvement elliptique.

Cela posé, admettons que les équations (I) aient été complètement intégrées, et proposons-nous de satisfaire aux équations différentielles (II), en faisant seulement varier les constantes que renferment les intégrales des équations différentielles (I).

Digitized by Google

La solution complète de ces dernières équations a été obtenue au Chapitre qui précède, et nous avons vu qu'elle fournissait les six constantes arbitraires

$$a,\ e,\ \varepsilon,\ \omega,\ \theta,\ \varphi,$$

que nous avons nommées les éléments de l'orbite elliptique de m. Conformément à ce que nous venons de dire, il s'agira donc de faire varier ces constantes arbitraires de manière à rétablir dans les équations différentielles (I) la considération des forces perturbatrices, ou, si l'on veut, la présence des termes $\frac{dR}{dx}, \frac{dR}{dy}, \frac{dR}{dz}$, qui constituent les seconds membres des équations différentielles complètes (II).

Représentons d'une manière générale par

$$a,\ b,\ c,\ e,\ f,\ g$$

ces six éléments ou constantes arbitraires, et soient, au bout du temps t,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad y = \frac{dy}{dt}, \qquad z' = \frac{dz}{dt},$$

les composantes de la vitesse de m. estimées parallèlement aux trois axes coordonnés.

Si l'on observe que chacune de ces constantes a, b..., peut être exprimée en fonction du temps t et des six variables x, y, z, x', y', z'; et que, réciproquement, on peut tirer de ces six intégrales les expressions de chacune des variables x, y..., en fonction du temps et des constantes a, b... g,

Digitized by Google

on aura les deux systèmes d'équations :

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \text{(II)} \\ x = \varphi(a, b, c, e, f, g, t), & a = \Psi(x, y, z, x', y', z', t), \\ y = \varphi_1(a, b, c, e, f, g, t), & b = \Psi_1(x, y, z, x', y', z', t), \\ z = \varphi_2(a, b, c, e, f, g, t), & c = \Psi_2(x, y, z, x', y', z', t), \\ x' = \varphi_3(a, b, c, e, f, g, t). & c = \Psi_3(x, y, z, x', y', z', t). \end{array}$$

. . . . . .

Ne considérons pour simplifier que l'une des intégrales (II), la première, par exemple,

$$(\alpha) \qquad a = \Psi(x, y, z, x', y', z', t).$$

L'effet des forces perturbatrices étant toujours très faible et leur action continue, on peut regarder les valeurs des coordonnées x, y, z, comme invariables pendant l'instant dt. Ainsi l'équation (α), durant cet instant, sera satisfaite, qu'il s'agisse du mouvement elliptique ou du mouvement troublé. Mais, dans l'instant qui suivra dt, les composantes $x'.y',z'$ de la vitesse recevront des accroissements $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, représentés respectivement par les quantités infiniment petites

$$\frac{dR}{dx}dt, \quad \frac{dR}{dy}dt, \quad \frac{dR}{dz}dt,$$

et, dans ce cas, l'élément a, devenu variable, devra être remplacé par sa variation différentielle qui est

$$(3) \quad da = \left(\frac{da}{dx'}\frac{dR}{dx} + \frac{da}{dy'}\frac{dR}{dy} + \frac{da}{dz'}\frac{dR}{dz}\right)dt.$$

Cette relation et celles analogues que l'on en déduirait pour les autres quantités b, c, e... devenues variables, permettront

Digitized by Google

donc de rétablir, dans les équations différentielles du mouvement elliptique, la considération des termes $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$ ou d'avoir égard par la seule variation des éléments a, b, c... à l'action des forces perturbatrices.

Nous allons donner à cette expression (3) une forme plus commode pour les applications, en substituant aux dérivées partielles $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$ qu'elle renferme, les dérivées de R prises par rapport aux constantes ou éléments elliptiques a, b, c.... Dans le calcul des variations de ces éléments, ce sont, en effet, ces dernières dérivées que l'on a besoin de connaître.

Remarquons pour cela que R étant une fonction de x, y, z, et ces dernières des fonctions de a, b, c... g, on a

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dx} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dx} + \cdots + \frac{dR}{dg}\frac{dg}{dx},$$

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dy} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dy} + \cdots + \frac{dR}{dg}\frac{dg}{dy},$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dz} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dz} + \cdots + \frac{dR}{dg}\frac{dg}{dz},$$

expressions qui, étant substituées dans celle de da, donnent

$$\begin{aligned} da = &\left(\frac{da}{dx'}\frac{da}{dx} + \frac{da}{dy'}\frac{da}{dy} + \frac{da}{dz'}\frac{da}{dz}\right)\frac{dR}{da}\,dt \\ &+ \left(\frac{da}{dx'}\frac{db}{dx} + \frac{da}{dy'}\frac{db}{dy} + \frac{da}{dz'}\frac{db}{dz}\right)\frac{dR}{db}\,dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \left(\frac{da}{dz'}\frac{dg}{dx} + \frac{da}{dy'}\frac{dg}{dy} + \frac{da}{dz'}\frac{dg}{dz}\right)\frac{dR}{dg}\,dt. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Mais la fonction R étant indépendante de x', y', z', ses dérivées prises par rapport à ces trois variables devront être nulles; ainsi

$$\frac{dR}{dx'} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dx'} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dx'} + \cdots + \frac{dR}{dg}\frac{dg}{dx'} = 0,$$

$$\frac{dR}{dy'} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dy'} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dy'} + \cdots + \frac{dR}{dg}\frac{dg}{dy'} = 0,$$

$$\frac{dR}{dz'} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dz'} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dz'} + \cdots + \frac{dR}{dg}\frac{dg}{dz'} = 0.$$

Multipliant la première de ces expressions par $\frac{da}{dx}$, la seconde par $\frac{da}{dy}$, la troisième par $\frac{da}{dz}$, puis retranchant de la valeur précédente de da la somme de ces produits qui sont séparément nuls, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} = &\left(\frac{da}{dx'}\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{db}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{db}{dz'}\right)\frac{dR}{db}\\ &+\left(\frac{da}{dx'}\frac{dc}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{dc}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{dc}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{dc}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{dc}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{dc}{dz'}\right)\frac{dR}{dc}\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\left(\frac{da}{dx'}\frac{dg}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{dg}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{dg}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{dg}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{dg}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{dg}{dz'}\right)\frac{dR}{dg},\end{aligned}$$

expression dans laquelle la dérivée $\frac{dR}{da}$ a disparu, comme disparaîtraient d'ailleurs, dans les valeurs de db, dc, etc., les dérivées $\frac{dR}{db}$, $\frac{dR}{dc}$...

Digitized by Google

En employant les notations symboliques (a,b), $(a,c)\ldots(a,g)$, pour représenter respectivement les facteurs de $\frac{dR}{db}$, $\frac{dR}{dc}$,... $\frac{dR}{dg}$, on peut mettre cette expression de da sous la forme abrégée que voici :

$$\text{A)}\quad \frac{da}{dt} = (a,b)\frac{dR}{db} + (a,c)\frac{dR}{dc} + \cdots + (a,g)\frac{dR}{dg}.$$

III. — Propriété dont jouissent les coefficients de la forme (a, b).

Cette expression de da jouit d'une propriété fort remarquable, et qui consiste en ce que *les coefficients qui multiplient les dérivées partielles* $\frac{dR}{db}$, $\frac{dR}{dc}$, *etc., deviennent indépendants du temps après la substitution pour* x, y, z, x', y', z' *de leurs valeurs en fonction de* t *et des éléments ou constantes arbitraires* a, b, $c\ldots,g$.

Pour démontrer cette importante proposition, il nous suffira évidemment de former la différentielle par rapport au temps de chacun des coefficients ci-dessus, et de faire voir que cette différentielle est toujours identiquement nulle.

Considérons, par exemple, la première de ces fonctions que nous avons désignée par (a,b)

$$(\sigma)\quad \begin{aligned}(a,b) = {} & \frac{da}{dx'}\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{db}{dy} \\ & - \frac{da}{dy}\frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{db}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{db}{dz'};\end{aligned}$$

Digitized by Google

en la différentiant par rapport à t, on a

$$d(a,b) = \frac{da}{dx'} d\frac{db}{dx} - d\frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dx'} + \frac{db}{dx} d\frac{da}{dx'} - d\frac{db}{dx'} \cdot \frac{da}{dx}$$
$$+ \frac{da}{dy'} d\frac{db}{dy} - d\frac{da}{dy} \cdot \frac{db}{dy'} + \frac{db}{dy} d\frac{da}{dy'} - d\frac{db}{dy'} \cdot \frac{da}{dy}$$
$$+ \frac{da}{dz'} d\frac{db}{dz} - d\frac{da}{dz} \cdot \frac{db}{dz'} + \frac{db}{dz} d\frac{da}{dz'} - d\frac{db}{dz'} \cdot \frac{da}{dz}.$$

Or, a étant une fonction de x, y, z, x', y', z' et de t, il devra en être de même de $\frac{da}{dx}$. Si donc l'on forme d'abord cette dernière expression et qu'on la différentie ensuite par rapport au temps, on aura, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs x', y', z', et posant, dans les équations (I), $U = \frac{\mu}{r}$, d'où

$$(a) \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{dU}{dy}, \qquad \frac{dz'}{dt} = \frac{dU}{dz},$$

on aura, disons-nous,

$$d\frac{da}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2a}{dxdt} + \frac{d^2a}{dx^2} x' + \frac{d^2a}{dxdy} y' + \frac{d^2a}{dxdz} z' \\ + \frac{d^2a}{dxdx'} \frac{dU}{dx} + \frac{d^2a}{dxdy'} \frac{dU}{dy} + \frac{d^2a}{dxdz'} \frac{dU}{dz} \end{array} \right\} dt.$$

Mais, en prenant la différentielle complète de a par rapport à t, on a

$$\frac{da}{dt} dt + \frac{da}{dx} dx + \frac{da}{dy} dy + \frac{da}{dz} dz$$
$$+ \frac{da}{dx'} dx' + \frac{da}{dy'} dy' + \frac{da}{dz'} dz' = 0.$$

Si l'on substitue, dans cette équation, à la place de dx', dy',

Digitized by Google

dz', leurs valeurs tirées des équations (a), son premier membre deviendra une fonction de x, y, z, x', y', z', et ce premier membre ne cessera pas d'être identiquement nul. Si donc l'on suppose cette substitution effectuée, et que, dans l'équation résultante, on fasse varier l'une quelconque de ces quantités, celle x par exemple, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dxdt}+\frac{d^2a}{dx^2}x'+\frac{d^2a}{dxdy}y'+\frac{d^2a}{dxdz}z'\\ +\frac{d^2a}{dxdx'}\frac{dU}{dx}+\frac{d^2a}{dxdy'}\frac{dU}{dy}+\frac{d^2a}{dxdz'}\frac{dU}{dz}\\ +\frac{da}{dx'}\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{da}{dy'}\frac{d^2U}{dxdy}+\frac{da}{dz'}\frac{dU}{dxdz'}=0,\end{aligned}$$

et, par suite, la valeur ci-dessus de $d\frac{da}{dx}$, deviendra

$$d\frac{da}{dx}=-\left(\frac{da}{dx'}\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{da}{dy'}\frac{d^2U}{dxdy}+\frac{da}{dz'}\frac{d^2U}{dxdz}\right)dt.$$

Maintenant, si l'on différentie par rapport au temps la valeur ci-dessus de $\frac{da}{dx'}$, on trouve

$$\begin{aligned}d\frac{da}{dx'}=\Big\{\frac{d^2a}{dx'dt}+\frac{d^2a}{dxdx'}x'+\frac{d^2a}{dydy'}y'+\frac{d^2a}{dzdz'}z'\\ +\frac{d^2a}{dx'^2}\frac{dU}{dx}+\frac{d^2a}{dy'dx'}\frac{dU}{dy}+\frac{d^2a}{dz'dx'}\frac{dU}{dz}\Big\}dt.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs identiquement

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}+\frac{da}{dx}x'+\frac{da}{dy}y'+\frac{da}{dz}z'\\ +\frac{da}{dx'}\frac{dU}{dx}+\frac{da}{dy'}\frac{dU}{dy}+\frac{da}{dz'}\frac{dU}{dz}=0,\end{aligned}$$

Digitized by Google

équation qui étant différentiée par rapport à x' donne, en remarquant que U ne dépend nullement de x', y', z',

$$\frac{d^2a}{dx'dt} + \frac{da}{dx} + \frac{d^2a}{dxdx'}x' + \frac{d^2a}{dydx'}y' + \frac{d^2a}{dzdx'}z'$$
$$+ \frac{d^2a}{dx'^2}\frac{dU}{dx} + \frac{d^2a}{dx'dy'}\frac{dU}{dy} + \frac{d^2a}{dx'dz'}\frac{dU}{dz} = 0.$$

Ainsi, la valeur de $d\frac{da}{dx'}$ se réduit à $-\frac{da}{dx}dt$. En écrivant les autres relations analogues, on a donc

$$d\frac{da}{dx'} = -\frac{da}{dx}dt,\ d\frac{da}{dy'} = -\frac{da}{dy}dt,\ d\frac{da}{dz'} = -\frac{da}{dz}dt,$$
$$d\frac{db}{dx'} = -\frac{db}{dx}dt,\ d\frac{db}{dy'} = -\frac{db}{dy}dt,\ d\frac{db}{dz'} = -\frac{db}{dz}dt,$$

etc. . . . . .

En substituant ces expressions et celles de $d\frac{da}{dx}$, $d\frac{db}{dx}$, etc. dans la différentielle complète de (a, b), on s'assurera aisément que

$$d(a, b) = 0,$$

d'où résulte

$$(a, b) = constante.$$

On prouverait de la même manière que

$$(a, c) = const.,\ (a, e) = const.,\ (a, f) = const.,\ (a, g) = const.$$

Ainsi, en se reportant à la valeur (A) de da, on voit que *la variation différentielle d'un élément quelconque* da *de l'orbite de m se trouve exprimée au moyen des différentielles partielles de la fonction R, prises par rapport aux cinq autres*

Digitized by Google

éléments b, c.., g, et multipliées par des fonctions de a, b, c... g qui jouissent toutes de cette propriété remarquable de ne pas contenir le temps d'une manière explicite.

IV. — Remarque sur le calcul des coefficients de la forme (a, b).

Les coefficients de la forme (a, b) qui entrent dans les expressions des variations différentielles des six éléments a, b, c.., g, résultent de la combinaison deux à deux de ces six quantités. Le nombre de ces coefficients est donc de trente. Mais, si l'on remarque que le coefficient (b, a), par exemple, se forme en permutant entre elles les lettres a et b du coefficient (a, b), on voit que le nombre de ces coefficients pourra être réduit à quinze ; car, si l'on effectue cette permutation dans l'équation (a), elle donne

$$(b, a) = \frac{db}{dx}\frac{da}{dx} - \frac{db}{dx}\frac{da}{dx'} + \ldots\ldots,$$

valeur qui est la même, au signe près, que celle de (a, b); en sorte que généralement

$$(b,a) = -(a,b).$$

Pour des coefficients formés des deux mêmes lettres, tels que (a,a), (b,b).... (g,g), on aurait évidemment

$$(a,a) = 0, \quad (b,b) = 0\ldots\ldots \quad (g,g) = 0.$$

Maintenant, si l'on écrit les valeurs des six variations différentielles da, db...., dg, en faisant usage des notations sym-

Digitized by Google

boliques que nous avons adoptées, on aura

$$
\text{(A)}\quad
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= (a,b)\frac{dR}{db} + (a,c)\frac{dR}{dc} + (a,e)\frac{dR}{de} + (a,f)\frac{dR}{df} + (a,g)\frac{dR}{dg},\\
\frac{db}{dt} &= -(a,b)\frac{dR}{da} + (b.c)\frac{dR}{dc} + \ldots \qquad\qquad + (b,g)\frac{dR}{dg},\\
\frac{dc}{dt} &= -(a,c)\frac{dR}{da} - (b,c)\frac{dR}{db} + \ldots \qquad\qquad + (c,g)\frac{dR}{dg},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dg}{dt} &= -(a,g)\frac{dR}{da} - (b,g)\frac{dR}{db} - \ldots \qquad\qquad - (f,g)\frac{dR}{dg}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le nombre des coefficients qu'il y a réellement lieu de calculer se réduit à quinze, et ces coefficients sont les suivants :

$$
\text{(B)}\quad
\begin{aligned}
&(a,b),\ (a,c),\ (a,e),\ (a,f),\ (a,g),\\
&(b,c),\ (b,e),\ (b,f),\ (b,g),\\
&(c,e),\ (c,f),\ )c,g),\\
&(e,f),\ (e,g),\\
&(f,g).
\end{aligned}
$$

V. — Cas où l'une des deux arbitraires qui entrent dans le coefficient (a, b) est une fonction de fonctions.

Nous allons examiner le cas où l'une des arbitraires, a, b, qui entrent dans la composition du facteur (a, b), celle b, par exemple, est une fonction de certaines quantités α, β, γ, que nous supposerons données immédiatement en fonction de x, y, z, x', y', z'.

Digitized by Google

Reprenons à cet effet l'expression de (a, b), savoir :

$$(a, b) = \frac{da}{dx'}\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{db}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{db}{dz'}.$$

On aura évidemment

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{db}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} + \frac{db}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{db}{dx'} = \frac{db}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx'} + \frac{db}{d\beta}\frac{d\beta}{dx'} + \frac{db}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dx'},$$

$$\frac{db}{dy} = \frac{db}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{db}{d\beta}\frac{d\beta}{dy} + \frac{db}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dy},$$

. . . . . .

et, par la substition de ces valeurs dans l'expression ci-dessus de (a,b), il en résultera

$$\begin{aligned}(a, b) = {} & \frac{db}{d\alpha}\left(\frac{da}{dx'}\frac{d\alpha}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{d\alpha}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{d\alpha}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{d\alpha}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{d\alpha}{dz'}\right) \\ & + \frac{db}{d\beta}\left(\frac{da}{dx'}\frac{d\beta}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{d\beta}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{d\beta}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{d\beta}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{d\beta}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{d\beta}{dz'}\right) \\ & + \frac{db}{d\gamma}\left(\frac{da}{dz'}\frac{d\gamma}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{d\gamma}{dx'} + \frac{da}{dy'}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{d\gamma}{dy'} + \frac{da}{dz'}\frac{d\gamma}{dz} - \frac{da}{dz}\frac{d\gamma}{dz'}\right),\end{aligned}$$

ou, en employant la notation symbolique adoptée,

$$\text{(C)} \qquad (a, b) = (\alpha, \alpha)\frac{db}{d\alpha} + (a, \beta)\frac{db}{d\beta} + (a, \gamma)\frac{db}{d\gamma}.$$

Digitized by Google

Ainsi, la recherche des coefficients de la forme (a, b) se ramène, dans le cas considéré, à celle des coefficients (a, α); (a, β). (a, γ), ce qui ne peut offrir aucune difficulté, puisque nous avons supposé que ces derniers coefficients étaient exprimés immédiatement en fonction de x, y, z, x', y', z'.

VI. — Variations différentielles des constantes arbitraires a l'origine du temps.

Les fonctions de la forme (a, b) devenant indépendantes du temps t, lorsqu'on y substitue pour x, y, z, x', y', z' leurs valeurs en fonction de t et des arbitraires $a, b, c..., g$, on peut, après la substitution, y faire t nul ou égal à une constante quelconque. Nous allons voir que, lorsqu'on prend pour arbitraires de la question les valeurs initiales des variables x, y, z, x', y', z', il en résulte des formules extrêmement simples.

Soient $x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0$ les valeurs de ces six variables à l'origine du temps, c'est-à-dire quand $t = 0$. On aura, d'après la formule (a)

$$(1) \qquad (a, b) = \frac{da}{dx'_0}\frac{db}{dx_0} - \frac{da}{dx_0}\frac{db}{dx'_0} + \frac{da}{dy'_0}\frac{db}{dy_0} - \frac{da}{dy_0}\frac{db}{dy'_0} + \frac{da}{dz'_0}\frac{db}{dz_0} - \frac{da}{dz_0}\frac{db}{dz'_0},$$

et, comme rien ne s'oppose à ce que l'on fasse $a = x_0$, $b = y_0$, $c = z_0$, etc., on en conclura

$$(x_0, x'_0) = -1, \quad (y_0, y'_0) = -1, \quad (z_0, z'_0) = -1.$$

Digitized by Google

Tous les autres coefficients (x_0, y_0), (x'_0, y_0), (x_0, z_0), etc., seront nuls, en sorte que l'on aura, pour déterminer les variations différentielles des arbitraires x_0, $y_0 \ldots$, z'_0, les six équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_0}{db} &= -\frac{dR}{dx'_0}, & \frac{dx'_0}{dt} &= \frac{dR}{dx_0}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= -\frac{dR}{dy'_0}, & \frac{dy'_0}{dt} &= \frac{dR}{dy_0}, \\ \frac{dz_0}{dt} &= -\frac{dR}{dz'_0}, & \frac{dz'_0}{dt} &= \frac{dR}{dz_0}. \end{aligned}$$

Ces formules sont, comme on le voit, d'une extrême simplicité : malheureusement, leur forme est plus curieuse qu'utile ; car le système des constantes arbitraires x_0, $y_0 \ldots$, z'_0 que nous avons considéré ne se rencontre pas ordinairement dans les questions de Mécanique. Telles qu'elles sont, cependant, ces formules vont nous permettre d'exprimer très simplement les dérivées partielles de R en fonction des variations des arbitraires, question inverse de celle que nous avons résolue au paragraphe II.

On a, en effet, en considérant R comme une fonction des arbitraires x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, et ces dernières comme des fonctions de a, b, c, e, f, g,

$$\frac{dR}{da} = \frac{dR}{dx_0}\frac{dx_0}{da} + \frac{dR}{dy_0}\frac{dy_0}{da} + \frac{dR}{dz_0}\frac{dz_0}{da} + \frac{dR}{dx'_0}\frac{dx'_0}{da} + \frac{dR}{dy'_0}\frac{dy'_0}{da} + \frac{dR}{dz'_0}\frac{dz'_0}{da},$$

ou, en mettant à la place de $\frac{dR}{dx_0}$, $\frac{dR}{dy_0}$, etc, leurs valeurs tirées

Digitized by Google

des équations précédentes,

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{dR}{da} = {} & \frac{dx_0}{da}\frac{dx'_0}{dt} + \frac{dy_0}{da}\frac{dy'_0}{dt} + \frac{dz_0}{da}\frac{dz'_0}{dt} \\ & - \frac{dx'_0}{da}\frac{dx_0}{dt} - \frac{dy'_0}{da}\frac{dy_0}{dt} - \frac{dz'_0}{da}\frac{dz_0}{dt}. \end{aligned}$$

Mais, en différentiant par rapport à t les arbitraires x_0, y_0, z_0, x'_0... regardées comme des fonctions de $a, b, c \ldots g$, l'on a

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{dx_0}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dx_0}{db}\frac{db}{dt} + \ldots\ldots \frac{dx_0}{dg}\frac{dg}{dt},$$

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{dy_0}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dy_0}{db}\frac{db}{dt} + \ldots\ldots \frac{dy_0}{dg}\frac{dg}{dt},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz'_0}{dt} = \frac{dz'_0}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dz'_0}{db}\frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dz'_0}{dg}\frac{dg}{dt}.$$

Si donc l'on pose

$$(4)\quad \begin{aligned} [a,b] = {} & \frac{dx_0}{da}\frac{dx'_0}{db} - \frac{dx_0}{db}\frac{dx'_0}{da} + \frac{dy_0}{da}\frac{dy'_0}{db} \\ & - \frac{dy_0}{db}\frac{dy'_0}{da} + \frac{dz_0}{da}\frac{dz'_0}{db} - \frac{dz_0}{db}\frac{dz'_0}{da}, \end{aligned}$$

$$(5)\quad \begin{aligned} [a,c] = {} & \frac{dx_0}{da}\frac{dx'_0}{dc} - \frac{dx_0}{dc}\frac{dx'_0}{da} + \frac{dy^0}{da}\frac{dy'_0}{dc} \\ & - \frac{dy_0}{dc}\frac{dy'_0}{da} + \frac{dz_0}{da}\frac{dz'_0}{dc} - \frac{dz_0}{dc}\frac{dz'_0}{da}. \end{aligned}$$

et trois autres combinaisons analogues pour les coefficients $[a,e]$, $[a,f]$, $[a,g]$); on obtient

$$(6)\quad \frac{dR}{da} = [a,b]\frac{db}{dt} + [a,c]\frac{dc}{dt} + \ldots + [a,g]\frac{dg}{dt},$$

Digitized by Google

expression dans laquelle les coefficients de la forme $[a,b]$ jouissent de la même propriété générale que ceux de (a,b).

Comme au paragraphe IV, on a ici

$$[a,a] = 0, \quad [b,b] = 0. \ldots, \quad [g,g] = 0,$$

et

$$[b,a] = -[a,b].$$

On peut donc, si on le veut, présenter sous la forme suivante l'ensemble des formules analogues à celle (5) :

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned}
\frac{dR}{da} &= [a,b]\frac{db}{dt} + [a,c]\frac{dc}{dt} + \ldots\ldots + [a,g]\frac{dg}{dt}, \\
\frac{dR}{db} &= -[a,b]\frac{da}{dt} + [b,c]\frac{dc}{dt} + \ldots\ldots + [b,g]\frac{dg}{dt}, \\
\frac{dR}{dc} &= -[a,c]\frac{da}{dt} - [b,c]\frac{db}{dt} + \ldots\ldots + [c,g]\frac{dg}{dt}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dR}{dg} &= -[a,g]\frac{da}{dt} - [b,g]\frac{db}{dt} - \ldots\ldots - [f,g]\frac{dg}{dt},
\end{aligned}$$

On déduit immédiatement de ces équations le théorème suivant : *La variation de la fonction perturbatrice* R, *en tant qu'elle dépend des variations des éléments* a,b,c...,g *du corps troublé, est une quantité toujours nulle.*

Car, si dans la différentielle complète de R, savoir

$$\frac{dR}{da}da + \frac{dR}{db}db + \frac{dR}{dc}dc + \ldots + \frac{dR}{dg}dg,$$

on substitue à $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db}$, etc. leurs valeurs ci-dessus (C), on

Digitized by Google

tombe sur une expression identiquement nulle, ce qui tient à ce que l'on peut supposer, comme nous l'avons vu (§ II), que l'orbite reste constante pendant l'instant dt, et qu'elle ne varie que de cet instant au suivant.

Nous ferons encore remarquer le résultat suivant, qui se déduit aisément des valeurs (1) et (4) de (a,b) et de $[a,b]$:

$$(a,b)\,[a,b] + (a,c)\,[a,c] + \ldots\ldots : + (a,g)\,[a,g] = 1.$$

Digitized by Google

CHAPITRE II

Application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à l'intégration des équations différentielles du mouvement troublé.

I. — Exposition du calcul complet des quinze coefficients (a, b).

Nous allons maintenant appliquer la méthode d'intégration qui précède à la recherche effective des variations différentielles des six éléments ou constantes arbitraires qui entrent dans les formules du mouvement elliptique.

Nous commencerons d'abord par remplacer les six arbitraires que nous avons considérées jusqu'ici, savoir :

$$a, b, c, e, f, g,$$

par celles

$$a, \theta, \varphi, K, l, \omega_1, \text{ (1)}$$

qui résultent des intégrations obtenues précédemment. Les

(1) Pour plus de simplicité, nons prenons 1° au lieu de l'excentricité e, la constante K à laquelle cette quantité se trouve liée par la relation

$$K^2 = \mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'^2 + \mathcal{H}''^2 = a^2 (1 - e^2);$$

2° au lieu de l'élément ε, l'arbitraire l, et 3° au lieu de l'angle ω, celui ω_1, compris entre la ligne des nœuds et le grand axe de l'orbite. Plus tard, nous remplacerons ces constantes par leurs valeurs en fonction des arbitraires usuelles.

Digitized by Google

quinze coefficients que nous aurons à former seront alors les suivants :

(I)

$$(a,\theta),\ (a,\varphi),\ (a,K),\ (a,l),\ (a,\omega_1),$$
$$(\theta,\varphi),\ (\theta,K),\ (\theta,l)\ (\theta,\omega_1),$$
$$(\varphi,K),\ (\varphi,l),\ (\varphi,\omega_1),$$
$$(K,l),\ (K,\omega_1),$$
$$(l,\omega_1).$$

Présentons d'abord un tableau des formules dont nous aurons à faire usage. On a

(II)

[1] $r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$

[2] $xy' - x'y = \mathcal{K},$

[3] $zx' - z'x = \mathcal{K}',$

[4] $yz' - y'z = \mathcal{K}'',$

[5] $x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{2}{r} - \frac{1}{a} = 0$ (1),

[6] $\frac{r^2 dv}{dt} = \sqrt{a(1-e^2)},$

[7] $r = a(1 - e\cos u),$

[8] $t + l = a^3(u - e\sin u),$

[9] $r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(v - \omega_1)},$

[10] $\cos(v - \omega_1) = \frac{K^2 - r}{er},$ (2)

[11] $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\mathcal{K}'^2 + \mathcal{K}''^2}}{\mathcal{K}},$

[12] $\operatorname{tang}\theta = -\frac{\mathcal{K}''}{\mathcal{K}'},$

[13] $K^2 = a^2(1 - e^2),$

[14] $\mathcal{K} = K\cos\varphi,$

[15] $\mathcal{K}' = K\sin\varphi\cos\theta,$

[16] $\mathcal{K}'' = K\sin\varphi\sin\theta,$

[17] $\sin v = \frac{z}{r\sin\varphi}$ (3),

[18] $r\cos v = x\cos\theta + y\sin\theta$ (4),

$$= \frac{y\mathcal{K}' - x\mathcal{K}''}{\sqrt{\mathcal{K}^2 + \mathcal{K}''^2}}.$$

(1) En posant

$$\frac{1}{dt^2}(dr^2 + r^2dv) = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad C = -\frac{\mu}{a}, \quad \mu = 1,$$

on rend cette équation identique avec celle (9) de la page 58.

(2) Cette formule se déduit de celle [9], en ayant égard à l'équation [13].

(3) En projetant le rayon vecteur r sur l'axe des z, on a $z = r\sin v\sin\varphi$; d'où résulte la formule [17].

(4) La formule [18] s'obtient en projetant d'abord r et ensuite x et y sur la ligne des nœuds. On lui donne la seconde forme indiquée, en ayant égard à la relation [11].

Digitized by Google

Il résulte de ces formules que

(III)

$$a = \text{fonct. } (x', y', z', r) \ldots \text{ équ. } [5],$$
$$\theta = \text{fonct. } (\mathcal{X}', \mathcal{X}'') \ldots\ldots \text{ équ. } [12],$$
$$K = \text{fonct. } (\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{X}'') \ldots \text{ équ. } [13],$$
$$\varphi = \text{fonct. } (\mathcal{X}, K) \ldots\ldots\ldots \text{ équ. } [14],$$
$$l - t = \text{fonc. } (a, K, r). \text{ équ. } [8] \text{ et } [7],$$
$$\omega_1 - v = \text{fonct. } (a, K, r). \text{ équ. } [10],$$
$$r = \text{fonct. } (x, y, z) \ldots\ldots \text{ équ. } [1],$$
$$\mathcal{X} = \text{fonct. } (x, y, x', y'). \text{ équ. } [2],$$
$$\mathcal{X}' = \text{fonct. } (z, y, z'y') \text{ équ. } [3],$$
$$\mathcal{X}'' + \text{fonct. } (z, x, z'x'). \text{ équ. } [4],$$
$$v = \text{fonct. } (\mathcal{X}', \mathcal{X}'', K, r, z) \text{ équ. } [19].$$

On a ensuite

$$(a) \quad \left\{ \frac{da}{dx'} = 2a^2x', \ \frac{da}{dy'} = 2a^2y', \ \frac{da}{dx'} = 2a^2z' ; \right.$$

$$(b) \quad \left\{ \frac{dl}{dr} = \frac{dt}{dr}, \ \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{dv}{dt} ; \right.$$

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{xz}{r^3 \sin\varphi \cos v}, \ \dfrac{dv}{d\varphi} = -\dfrac{z \cos\varphi}{r \sin^2\varphi \cos v} ; \\ \dfrac{dv}{dy} = -\dfrac{yz}{r^3 \sin\varphi \cos v}, \\ \dfrac{dv}{dz} = \dfrac{r^2 - z^2}{r^3 \sin\varphi \cos v} ; \ \dfrac{dv}{dt} = \left(r \dfrac{dz}{dt} - z \dfrac{dr}{dt} \right) \dfrac{1}{r^3 \sin\varphi \cos v} ; \end{array} \right.$$

(*a*) Ces formules s'obtiennent en différentiant successivement par rapport à x, y' et z' l'équ. [5] du groupe (II).

(*b*) Ces formules résultent de la 5ᵉ des équations (III).

(*c*) On obtient ces valeurs en différentiant l'équation [17] du groupe (II), et ayant égard à la relation [1].

Digitized by Google

$$(d)\quad \left\{ \frac{dl}{dx} = \frac{dl}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dl}{dr};\ \frac{dl}{dy} = \frac{y}{r}\frac{dl}{dr},\ \frac{dl}{dz} = \frac{z}{r}\frac{dl}{dr};\right.$$

$$(e)\quad \left\{ \frac{d\theta}{d\mathcal{K}'}, = \frac{\mathcal{K}''\cos^2\theta}{\mathcal{K}'^2},\ \frac{d\theta}{d\mathcal{K}''} = -\frac{\cos^2\theta}{\mathcal{K}'};\right.$$

$$(f)\quad \left\{ \frac{d\varphi}{d\mathcal{K}} = -\frac{1}{K\sin\varphi},\ \frac{d\varphi}{dK} = \frac{\cos\varphi}{K\sin\varphi} = \frac{1}{K\,\mathrm{tang}\,\varphi};\right.$$

$$(g)\quad \left\{ \frac{dK}{dz'} = r\sin\varphi\cos v;\right.$$

$$(h)\quad \left\{ \frac{d\varphi}{dz'} = \frac{r}{K}\cos\varphi\cos v;\right.$$

$$(i)\quad \left\{ \frac{d\theta}{dz'} = \frac{z\cos\varphi}{K\cdot\sin^2\varphi};\right.$$

(*d*) Ces formules sont données par la 5ᵉ équ. du groupe (III), en y considérant a et K comme des constantes et ayant égard à la relation [1].

(*e*) On déduit ces formules de l'équation [12] du groupe (II).

(*f*) Ces valeurs sont fournies par l'équation [14] du groupe (II).

(*g*) En différentiant la valeur de K par rapport à z' et observant que cette variable n'entre pas dans $\mathcal{K}$, on trouve, en effet,

$$\frac{dK}{dz'} = -x\frac{\mathcal{K}'}{K} + y\frac{\mathcal{K}''}{K} = \sin\varphi\,(x\cos\theta + y\sin\theta) = r\sin\varphi\cos v.$$

(*h*) L'équation [11] donne, en la différentiant par rapport à z',

$$\frac{d\varphi}{dz'} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathcal{K}\sqrt{(\mathcal{K}''^2 + \mathcal{K}'^2)}} = \left(\mathcal{K}'\frac{d\mathcal{K}'}{dz'} + \mathcal{K}''\frac{d\mathcal{K}''}{dz'}\right),$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dz'} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathcal{K}\sqrt{\mathcal{K}'^2 + \mathcal{K}''^2}}(y\mathcal{K}'' - x\mathcal{K}')$$

Mais, d'après les équations [14], [15], [16], on a

$$(y\mathcal{K}'' - x\mathcal{K}') = K\sin\varphi\,(x\cos\theta + y\sin\theta) = Kr\sin\varphi\cos v$$

$$\mathcal{K} = K\cos\varphi,\quad \sqrt{(\mathcal{K}'^2 + \mathcal{K}''^2} = K\sin\varphi;$$

on a donc

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{r}{K}\cos\varphi\cos v.$$

(*i*) De la valeur [12] on déduit, en la différentiant par rapport à z',

$$\frac{d\theta}{dz'} = -\frac{\cos^2\theta}{\mathcal{K}'^2}(\mathcal{K}'x + \mathcal{K}'y).$$

Mais

$$\mathcal{K}'x + \mathcal{K}'y = -\mathcal{K}z,\qquad \mathcal{K} = K\cos\varphi,\qquad \mathcal{K}' = -K\sin\varphi\cos\theta;$$

on a donc

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{z\cos\varphi}{K\sin^2\varphi}.$$

Digitized by Google

$$(j)\quad \left\{ x\frac{dK}{dx'} + y\frac{dK}{dy'} + z\frac{dK}{dz'} = 0. \right.$$

Valeurs de quelques combinaisons fondamentales.

Nous allons rapporter ici les valeurs des principales combinaisons dont nous aurons à faire usage dans le calcul des coefficients (I). On a

$$[a]\quad \left\{ (\mathcal{X},\mathcal{X}') = \mathcal{X}'',\ (\mathcal{X},\mathcal{X}'') = -\mathcal{X}',\ (\mathcal{X}',\mathcal{X}'') = \mathcal{X}. \right.$$

$$[b]\quad \left\{ (a,\mathcal{X}) = 0\quad (a,\mathcal{X}') = 0,\quad (a,\mathcal{X}'') = 0. \right.$$

$$[c]\quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{X}',\mathcal{X}) = -(\mathcal{X},\mathcal{X}') = -\mathcal{X}''. \\ (\mathcal{X}'',\mathcal{X}) = -(\mathcal{X},\mathcal{X}'') = \mathcal{X}'. \\ (\mathcal{X}'',\mathcal{X}') = -(\mathcal{X}',\mathcal{X}'') = -\mathcal{X}' \end{array} \right.$$

$$[d]\quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{X},K) = (\mathcal{X},\mathcal{X}')\dfrac{\mathcal{X}'}{K} + (\mathcal{X},\mathcal{X}'')\dfrac{\mathcal{X}''}{K} = 0. \\ (\mathcal{X}',K) = (\mathcal{X}',\mathcal{X})\dfrac{\mathcal{X}}{K} + (\mathcal{X}',\mathcal{X}'')\dfrac{\mathcal{X}''}{K} = 0. \\ (\mathcal{X}'',K) = (\mathcal{X}'',\mathcal{X})\dfrac{\mathcal{X}}{K} + (\mathcal{X}'',\mathcal{X}')\dfrac{\mathcal{X}'}{K} = 0. \end{array} \right.$$

$$[e]\quad \left\{ (\theta,\mathcal{X}) = (\mathcal{X}',\mathcal{X})\frac{d\theta}{d\mathcal{X}'} + (\mathcal{X}'',\mathcal{X})\frac{d\theta}{d\mathcal{X}''} = -1. \right.$$

(j) On démontre aisément cette proposition à l'aide des équations [2] [3] [4] du groupe (II) et pour toute autre fonction χ des arbitraires $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}''$, $\mathcal{X}$.

[a] Ces relations s'obtiennent en formant à l'aide des équations [2], [3], [4] les dérivées partielles de $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}''$ par rapport aux variables x, y, z x', y', z' et substituant les résultats dans l'équation (σ) du § III, Chapitre I.

[b] Il faut, pour obtenir ces valeurs, joindre aux dérivées ci-dessus celles relatives à l'arbitraire a, et que fournit l'équation [5].

[c] Ces équations résultent de ce que l'on a généralement $(b,a) = -(a,b)$.

[d] On obtient ces relations en appliquant la formule (C), Chap. I, et ayant égard à la valeur de K.

[e] La substitution des valeurs (e) et [c] donne

$$(\theta,\mathcal{X}) = -\left(\frac{\mathcal{X}'^2 + \mathcal{X}''^2}{\mathcal{X}'^2}\right)\cos^2\theta = -1.$$

Digitized by Google

$$[f] \left\{ \quad (\varphi, r) = \frac{1}{r}\left(x\frac{d\varphi}{dx'} + y\frac{d\varphi}{dy'} + z\frac{d\varphi}{dz'}\right) = 0. \right.$$

$$[g] \left\{ \quad (a, r) = \frac{2a^2}{r}(xx' + yy' + zz') = 2a^2\frac{dr}{dt}. \right.$$

$$[h] \left\{ \quad (\omega_1, r) = (a, r)\frac{d\omega_1}{da} + (\varphi, r)\frac{dv}{d\varphi} = 2a^2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega_1}{da}. \right.$$

Valeurs générales des combinaisons de l et de ω_1 avec une constante quelconque χ.

D'après la cinquième équation du groupe (III), on doit avoir

$$l = -t + \text{fonct.}\,(a, \mathrm{K}, r).$$

Si donc on applique à cette équation la formule (C) et qu'on remarque que l est indépendant des variables x', y', z', on aura, par rapport à une constante quelconque χ,

$$(l, \chi) = -\frac{dl}{dx}\frac{d\chi}{dx'} + \frac{dl}{dy}\frac{d\chi}{dy'} + \frac{dl}{dz}\frac{d\chi}{dz'}\Big)$$
$$+ \left[(a, \chi)\frac{dl}{da} + (\mathrm{K}, \chi)\frac{dl}{d\mathrm{K}}\right],$$

[f] On a

$$(\varphi, r) = \left(\frac{dr}{dx}\frac{d\varphi}{dx'} + \frac{dr}{dy}\frac{d\varphi}{dy'} + \frac{dr}{dz}\frac{d\varphi}{dz'}\right) = \frac{1}{r}\left(x\frac{d\varphi}{dx'} + y\frac{d\varphi}{dy'} + z\frac{d\varphi}{dz'}\right)$$

valeur qui doit être nulle en vertu de l'équation [j], puisque φ est une fonction des arbitraires $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$.

[g] Si, dans l'équation

$$(a, r) = \frac{1}{r}\left(x\frac{da}{dx'} + y\frac{da}{dy'} + z\frac{da}{dz'}\right),$$

on met pour $\frac{da}{dx'}$, $\frac{da}{dy'}$, $\frac{da}{dz'}$ leurs valeurs [a], on obtient le résultat cité.

[h] On parvient à ce résultat par la substitution des valeurs [f] et [g].

Digitized by Google

ou, en vertu des équations (d),

$$(\alpha)\quad (l,\chi) = -\frac{1}{r}\frac{dl}{dr}\left(x\frac{d\chi}{dx'} + y\frac{d\chi}{dy'} + z\frac{d\chi}{dz'}\right) + \left[(a,\chi)\frac{dl}{da} + (\mathrm{K},\chi)\frac{dl}{d\mathrm{K}}\right].$$

On a 5e équation (III)

$$\omega_1 = v - \text{fonct.}\,(a, \mathrm{K}, r).$$

On a donc, par rapport à une constante quelconque χ,

$$(\omega,\chi) = -\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}\left(x\frac{d\chi}{dx'} + y\frac{d\chi}{dy'} + z\frac{d\chi}{dz'}\right) - \left(\frac{dv}{dx}\frac{d\chi}{dx'} + \frac{dv}{dy}\frac{d\chi}{dy'} + \frac{dv}{dz}\frac{d\chi}{dz'}\right) + \left[(a,\chi)\frac{d\omega_1}{da} + (\mathrm{K},\chi)\frac{d\omega_1}{d\mathrm{K}}\right],$$

ou, d'après les équations (c), et en considérant v comme une fonction de φ, (équ. [17]),

$$(\beta)\quad (\omega,\chi) = -\frac{1}{r}\frac{d\omega_1}{dr}\left(x\frac{d\chi}{dx'} + y\frac{d\chi}{dy'} + z\frac{d\chi}{dz'}\right) \left\{+\frac{z}{r^2\sin\varphi\cos v}\left(x\frac{d\chi}{dx'} + y\frac{d\chi}{dy'} + z\frac{d\chi}{dz'}\right) - \frac{1}{r\sin\varphi\cos v}\frac{d\chi}{dz'}\right\} + \left[(a,\chi)\frac{d\omega_1}{da} + (\mathrm{K},\chi)\frac{d\omega_1}{d\mathrm{K}} + (\varphi,\chi)\frac{dv}{d\varphi}\right].$$

Détermination des quinze coefficients (I)

I. — *Valeur de* (a,K). — On a 3e équation (III)

$$\mathrm{K} = \text{fonct.}\,(\mathcal{X},\mathcal{X}',\mathcal{X}''),$$

Digitized by Google

d'où, en appliquant la formule (C),

$$(a,\mathrm{K}) = (a,\mathcal{H})\frac{d\mathrm{K}}{d\mathcal{H}} + (a,\mathcal{H}')\frac{d\mathrm{K}}{d\mathcal{H}'} + (a,\mathcal{H}'')\frac{d\mathrm{K}}{d\mathcal{H}''}.$$

Mais, d'après les équations [b],

$$(a,\mathcal{H}) = 0, \qquad (a,\mathcal{H}') = 0, \qquad (a,\mathcal{H}'') = 0;$$

on a donc

$$(a,\mathrm{K}) = 0.$$

II. — *Valeur de* (a,φ). — φ étant une fonction de $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$, on a semblablement

$$(a,\varphi) = (a,\mathcal{H})\frac{d\varphi}{d\mathcal{H}} + (a,\mathcal{H}')\frac{d\varphi}{d\mathcal{H}'} + (a,\mathcal{H}'')\frac{d\varphi}{d\mathcal{H}''},$$

d'où

$$(a,\varphi) = 0.$$

III. — *Valeur de* (a,θ). — On a

$$\theta = \text{fonct}\,(\mathcal{H}',\mathcal{H}''),$$

et, par conséquent,

$$(a,\theta) = (a,\mathcal{H}')\frac{d\theta}{d\mathcal{H}'} + (a,\mathcal{H}'')\frac{d\theta}{d\mathcal{H}''}.$$

Ainsi

$$(a,\theta) = 0.$$

IV. — *Valeur de* $(\varphi\mathrm{K})$. — On a

$$(\varphi,\mathrm{K}) = (\mathcal{H},\mathrm{K})\frac{d\varphi}{d\mathcal{H}} + (\mathcal{H}',\mathrm{K})\frac{d\varphi}{d\mathcal{H}'} + (\mathcal{H}'',\mathrm{K})\frac{d\varphi}{d\mathcal{H}''},$$

c'est-à-dire, en vertu des équations [d],

$$(\varphi,\mathrm{K}) = 0.$$

Digitized by Google

V. — *Valeur de* (θ, K). — On a

$$(\theta, \mathcal{K}) = (\mathcal{K}, K)\frac{d\theta}{d\mathcal{K}'} + (\mathcal{K}'', K)\frac{d\theta}{d\mathcal{K}''},$$

et par conséquent

$$(\theta, K) = 0.$$

VI. — *Valeur de* (θ, φ). — On a

$$\varphi = \text{fonct. } (\mathcal{K}, K),$$

en sorte que

$$(\theta, \varphi) = (\theta, \mathcal{K})\frac{d\varphi}{d\mathcal{K}} + (\theta, K)\frac{d\varphi}{dK}.$$

On a d'ailleurs, équ. [*e*] et (*f*),

$$(\theta, \mathcal{K}) = -1, \quad \frac{d\varphi}{d\mathcal{K}} = -\frac{1}{K \sin\varphi},$$

et de plus

$$(\theta, K) = 0.$$

On a donc

$$(\theta, \varphi) = \frac{1}{K \sin\varphi} \text{ ou } (\varphi, \theta) = -\frac{1}{K \sin\varphi}.$$

VII. — *Valeur de* (l, φ). — On a

$$l = -t + \text{fonct } (a, K, r).$$

Or, si dans la formule (α) on fait $\chi = \varphi$, il est clair que la somme entre crochets sera nulle, puisque, d'après ce qui précède, $(a, \varphi) = 0$ et $(K, \varphi) = 0$; il en sera de même de la somme entre parenthèses équ. (*j*), car φ ne dépend que des

Digitized by Google

constantes $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$. On aura donc

$$(l,\varphi) = 0.$$

VIII. — *Valeur de* (l,θ). — Soit fait dans la même formule (α), $\chi = \theta$. Cette arbitraire n'étant fonction que de $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$, la partie entre parenthèses sera nulle par la même raison que tout à l'heure; il en sera de même de la partie entre crochets, car, comme nous venons de le voir,

$$(a,\varphi) = 0, \quad (K,\theta) = 0.$$

Ainsi

$$(l,\theta) = 0.$$

IX. — *Valeur de* (l,K). — Soit $\chi = K$. On a

$$(a,K) = 0, \ (K,K) = 0;$$

la somme entre parenthèses est nulle d'après l'équation (j). Donc

$$(l,K) = 0.$$

X. — *Valeur de* (l,a). — En faisant $\chi = a$ dans la formule (α), et ayant égard aux relations (a), on trouve

$$(l,a) = -\frac{2a^2}{r}(xx' + yy' + zz')\frac{dl}{dr} = -2a^2\frac{dr}{dt}\frac{dl}{dr},$$

c'est-à-dire, d'après la première des équations (b),

$$(l,a) = -2a^2.$$

XI. — *Valeur de* (ω_1,a) — On a

$$\omega_1 = v - \text{fonct.}(a,K,r).$$

Digitized by Google

Or, en considérant la formule (β) et faisant $\chi = 0$, on voit : 1° que la partie entre parenthèses de cette expression se réduit [en faisant usage de formules (a)], à

$$2\,a^2 r \frac{dr}{dt};$$

2° que celle comprise entre les accolades devient, eu égard aux équations (C),

$$-\frac{2a^2}{r^2 \sin\varphi \cos v}\left(r\frac{dz}{dt} - z\frac{dr}{dt}\right) = -2a^2\frac{dv}{dt};$$

3° enfin que la somme entre crochets est nulle, puisque

$$(a,a) = 0, \quad (\mathrm{K},a) = 0, \quad (\varphi,a) = 0.$$

On a donc

$$(\omega_1,a) = -2a^2\left(\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dv}{dt}\right),$$

c'est-à-dire, d'après la seconde des formules (b),

$$(\omega_1,a) = 0.$$

XII. — *Valeur de* (ω_1,K). — Soit $\chi = \mathrm{K}$. En considérant K comme une fonction de $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}''$, et ayant égard aux valeurs suivantes :

$$(a,\mathrm{K}) = 0, \qquad (\mathrm{K},\mathrm{K}) = 0, \qquad (\varphi\mathrm{K}) = 0,$$

on trouve, après avoir remplacé $\frac{d\mathrm{K}}{dz'}$ par sa valeur (i'),

$$(\omega_1,\mathrm{K}) = -1.$$

Digitized by Google

XIII. — *Valeur de* (ω_1, φ). — Soit fait dans la même formule $\chi = \varphi$. Cette arbitraire étant une fonction de $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}''$, les sommes entre parenthèses seront nulles en vertu de l'équation (j); et comme, d'ailleurs,

$$(a,\varphi) = 0, \quad (K,\varphi) = 0, \quad (\varphi,a) = 0,$$

la valeur de (ω_1,φ) se réduira à la suivante :

$$(\omega_1, \varphi) = -\frac{1}{r \sin\varphi \cos v} \frac{d\varphi}{dz'}.$$

Mais l'on a équ. (h)

$$\frac{d\varphi}{dz'} = \frac{r}{K} \cos\varphi \cos v ;$$

on a donc

$$(\omega_1, \varphi) = -\frac{\cos\varphi}{K \sin\varphi}.$$

XIV. — *Valeur de* (ω_1,θ). — En faisant $\chi = \theta$ dans la formule (β) et observant que θ est une fonction de $\mathcal{X}'$ et de $\mathcal{X}''$, cette formule devient, par les mêmes raisons que ci-dessus,

$$(\omega_1,\theta) = -\frac{1}{r \sin\varphi \cos v} \frac{d\theta}{dz'} + (\varphi,\theta) \frac{dv}{d\varphi};$$

car, dans la somme entre crochets, $(a,\theta) = 0$ et $(K,\theta) = 0$.

Or, d'après ce qui précède

$$\frac{d\theta}{dz'} = \frac{z \cos\varphi}{K \sin^2\varphi}, \quad (\varphi,\theta) = -\frac{1}{K \sin\varphi}, \quad \frac{dv}{d\varphi} = -\frac{z \cos\varphi}{r \sin^2\varphi \cos v}.$$

On a donc

$$(\omega_1, \theta) = -\frac{z \cos\varphi}{Kr \sin^3\varphi \cos v} + \frac{z \cos\varphi}{Kr \sin^3\varphi \cos v},$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$(\omega_1, \theta) = 0.$$

XV. — *Valeur de* (ω_1, l). — On a

$$l = \text{fonct.}\,(t, r, a, \mathrm{K}),$$

et par conséquent

$$(\omega_1, l) = (\omega_1, r)\frac{dl}{dr} + (\omega_1, a)\frac{dl}{da} + (\omega_1, \mathrm{K})\frac{dl}{d\mathrm{K}}.$$

On a d'ailleurs

$$(\omega_1 a) = 0, \qquad (\omega_1 \mathrm{K}) = -1,$$

en sorte que, remplaçant $(\omega_1 r)$ par sa valeur $[h]$ et ayant égard à la première des équations (b), il vient

$$(\omega_1 l) = 2a^2\frac{d\omega_1}{da} - \frac{dl}{d\mathrm{K}};$$

substituant dans cette expression pour $\frac{d\omega_1}{da}$ et $\frac{dl}{d\mathrm{K}}$ leurs valeurs tirées des équations [8] et [10], en y regardant e comme une fonction des arbitraires a et K, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(\omega_1 l) = 0.$$

C'est le dernier des coefficients qu'il nous restait à obtenir.

Digitized by Google

II. — Variations différentielles des six constantes arbitraires qui entrent dans les formules du mouvement elliptique.

A l'aide des quinze coefficients I, II... XV que nous venons de calculer, il est maintenant bien facile de déterminer les variations produites par l'action des forces perturbatrices sur les six constantes arbitraires

$$a,\ l,\ \mathrm{K},\ \omega_1,\ \theta,\ \varphi.$$

Reprenons, à cet effet, la formule générale (A) qui donne l'expression de la variation d'un élément quelconque a, savoir :

$$\frac{da}{dt} = (a,b)\frac{d\mathrm{R}}{db} + (a,c)\frac{d\mathrm{R}}{dc} + \ldots + (a,g)\frac{d\mathrm{R}}{dg},$$

et remplaçons-y successivement a et b par les constantes $a, l \ldots \varphi$. Il est aisé de voir que les résultats auxquels on parviendra de cette manière seront les suivants :

Combinaison de a et l

$$(a) \qquad da = 2a^2\frac{d\mathrm{R}}{dl}\,dt, \qquad dl = -2a^2\frac{d\mathrm{R}}{da}\,dt;$$

car, à l'exception de (a,l) pour la première combinaison, et de (l,a) pour la seconde, tous les autres coefficients sont nuls.

Combinaison de K et ω_1,

$$(b) \qquad d\mathrm{K} = \frac{d\mathrm{R}}{d\omega_1}\,dt, \qquad d\omega_1 = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{K}}\,dt - \frac{\cos\varphi}{\mathrm{K}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}\,dt;$$

Digitized by Google

car, à l'exception de (K,ω_1) pour la première combinaison et de (ω_1,K) et (ω_1,φ) pour la seconde, tous les autres coefficients ont des valeurs nulles.

Combinaison de θ et φ

$$(c)\quad d\theta = \frac{1}{K\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi}dt,\quad d\varphi = \frac{\cos\varphi}{K\sin\varphi}\frac{dR}{d\omega_1}dt - \frac{1}{K\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta}dt;$$

car, à l'exception de (θ,φ) pour la première combinaison, et de (φ,θ) et (φ,ω_1) pour la seconde, tous les autres coefficients sont nuls.

Il nous reste à remplacer l, K et ω_1, par les constantes

$$e,\ \varepsilon,\ \omega,$$

qui sont celles communément employées dans les théories astronomiques. Or, si l'on remarque que l et K sont liés à e, ε et ω par les relations suivantes,

$$nl = c = \varepsilon - \omega,\quad K = \sqrt{\mu a(1-e^2)},\quad a^3n^2 = \mu,$$

on aura d'abord

$$d\varepsilon = d\omega + ndl + ldn,$$

ou, en remplaçant dn par sa valeur $-\frac{3}{2}\frac{n}{a}da$,

$$(d)\qquad d\varepsilon = d\omega + ndl - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon-\omega}{a}da.$$

On aura ensuite

$$dK = \frac{\sqrt{\mu(1-e^2)}}{2\sqrt{a}}da - e\frac{\sqrt{\mu a}}{\sqrt{(1-e^2)}}de,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire, en mettant a^3n^2 à la place de μ et résolvant par rapport à de,

$$(e) \qquad de = -an\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}dK + \frac{1-e^2}{2ae}da.$$

Quant à l'arbitraire ω_1, nous avons dit que c'est l'angle formé par la ligne des nœuds avec le grand axe de l'orbite. Or, comme ω représente l'angle que forme le même axe avec une droite fixe située dans le plan de cette orbite, il est évident que l'on aurait $d\omega = d\omega_1$, si la ligne des nœuds n'avait aucun mouvement pendant l'instant dt. Mais, cette ligne changeant de position à chaque instant, il est clair que $d\omega$ sera égal à $d\omega_1$ augmenté du mouvement du nœud projeté sur le plan de l'orbite, lequel, aux quantités près du second ordre, est exprimé par $\cos\varphi\, d\theta$. On aura donc

$$(f) \qquad d\omega = d\omega_1 + \cos\varphi\, d\theta.$$

Nous allons maintenant, pour achever la transformation des valeurs de (a), (b), (c), comparer les dérivées de R considéré comme une fonction des arbitraires provisoires,

$$a,\ l,\ K,\ x,\ \theta,\ \varphi,$$

aux dérivées de la même fonction regardée comme dépendante des éléments elliptiques

$$a,\ e,\ \varepsilon,\ \omega,\ \theta,\ \varphi.$$

Nous aurons évidemment, en différentiant dans ces deux

Digitized by Google

hypothèses (*a*),

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dR}{dl}\frac{dl}{dt} + \frac{dR}{dK}\frac{dK}{dt}$$

$$+ \frac{dR}{d\omega_1}\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dR}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dR}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \left\{\frac{dR}{da}\right\}\frac{da}{dt} + \frac{dR}{de}\frac{de}{dt} + \frac{dR}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$+ \frac{dR}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \left\{\frac{dR}{d\theta}\right\}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dR}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt},$$

expression dont le second membre devient, en y substituant pour $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ leurs valeurs données par les relations (*d*), (*e*), (*f*),

$$\left\{\frac{dR}{da}\right\}\frac{da}{dt}$$

$$- \frac{dR}{de}\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dK}{dt} + \frac{dR}{de}\frac{1-e^2}{2ae}\frac{da}{dt}$$

$$+ \frac{dR}{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dR}{d\varepsilon}\cos\varphi\frac{d\theta}{dt} + n\frac{dR}{d\varepsilon}\frac{dl}{dt}$$

$$- \frac{dR}{d\varepsilon}\frac{3}{2}\frac{e-\omega}{a}\frac{da}{dt}$$

$$+ \frac{dR}{d\omega}\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dR}{d\omega}\cos\varphi\frac{d\theta}{dt}$$

$$+ \left\{\frac{dR}{d\theta}\right\}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dR}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

(*a*) Nous représentons ici par un signe particulier les dérivées partielles de R prises par rapport aux éléments a et θ du second système, pour les distinguer de celles qui se rapportent aux éléments du premier système.

Digitized by Google

Identifiant ce second membre au premier, on obtient

$$\frac{dR}{da} = \left\{\frac{dR}{da}\right\} + \frac{1-e^2}{2ae}\frac{dR}{de} - \frac{3}{2}\frac{e-\omega}{a}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{dR}{dl} = n\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{dR}{dK} = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dR}{de},$$

$$\frac{dR}{d\omega_1} = \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega},$$

$$\frac{dR}{dt} = \left\{\frac{dR}{d\theta}\right\} + \left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}\right)\cos\varphi,$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dR}{d\varphi}.$$

Maintenant, si dans les équations (a), (b), (c), on substitue pour $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{dl}$, $\frac{dR}{dK}$, etc., leurs valeurs ci-dessus, puis que, dans les formules (d), (e), (f), on mette pour da, dl, dK, $d\omega_1$ et $d\theta$, leurs valeurs transformées, on trouvera, en supprimant le signe $\{\ \}$, devenu inutile, et observant que l'on a $n^2 = a^{-3}$ et $K = \sqrt{a(1-e^2)}$,

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
da &= 2a^2 n\frac{dR}{d\varepsilon}dt,\\
d\varepsilon &= \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{dR}{de}dt - 2a^2 n\frac{dR}{da}dt,\\
de &= -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}\right]dt,\\
d\omega &= \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dR}{de}dt,\\
d\theta &= \frac{an}{\sin\varphi\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi}dt,\\
d\varphi &= -\frac{an}{\sin\varphi\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\theta}dt.
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Telles sont les formules qui expriment les variations différentielles des six arbitraires que l'on a coutume de considérer dans la théorie du mouvement elliptique. On leur donne la forme indiquée par Laplace dans le *supplément* au troisième volume de la *Mécanique céleste*, en remplaçant $\frac{1}{an}$ et $\frac{1}{a^2n}$ par les expressions équivalentes $\frac{a^2n}{\mu}$ et $\frac{an}{\mu}$, et prenant μ pour unité de masse, comme le supposent toutes ces formules. Il faut remarquer, en outre, que Laplace prend — R au lieu de R, ce qui change le signe des équations ci-dessus.

On peut vérifier que la substitution des valeurs (A) rend bien identiquement nulle la différentielle complète de R

$$\frac{dR}{da}da + \frac{dR}{d\varepsilon}d\varepsilon + \frac{dR}{de}de + \frac{dR}{d\omega}d\omega + \frac{dR}{d\theta}d\theta + \frac{dR}{d\varphi}d\varphi,$$

comme nous l'avons reconnu au § VI du Chapitre I.

Remarque. — Avant de terminer ce paragraphe, nous ferons une remarque essentielle sur la manière d'exprimer l'anomalie moyenne dans le mouvement troublé.

Dans l'expression de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, entre la dérivée de R par rapport à a. Or, lorsqu'on a à faire cette différentiation, on peut (R étant fonction de $nt + \varepsilon$ et n ne dépendant que de a seul) se dispenser d'avoir égard à la variation du mouvement moyen n, qui est facteur du temps dans l'expression de la longitude moyenne.

Supposons, en effet, que n vienne à varier, et voyons ce qui doit en résulter dans la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Il est évident que la dérivée

$$\frac{d(nt+\varepsilon)}{dt}$$

Digitized by Google

se composera : 1° d'un terme $t\frac{dn}{dt}$ contenant t en facteur, et 2° de la variation

$$-2a^2n\frac{dR}{dn}\frac{dn}{da} = -2a^2n\frac{dR}{d\varepsilon}t\frac{dn}{da}$$

que subit la dérivée $\frac{dR}{da}$, dans la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, à raison de la variation de n; de telle sorte que la variation complète de l'angle $nt + \varepsilon$ ou de la longitude moyenne sera exprimée par

$$t\frac{dn}{dt} - 2a^2n\frac{dR}{d\varepsilon}t\frac{dn}{da}.$$

Mais

$$\frac{da}{dt} = 2a^2n\frac{dR}{d\varepsilon};$$

substituant et réduisant, on aura donc ce résultat

$$t\frac{dn}{dt} - t\frac{dn}{dt} = 0,$$

qui exprime que la variation de l'angle $nt + \varepsilon$, lorsque n vient à varier, est une quantité toujours nulle.

De là résulte évidemment que, dans la dérivée

$$\frac{d(nt+\varepsilon)}{dt} = n + t\frac{dn}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt},$$

on peut omettre le terme $t\frac{dn}{dt}$, et écrire simplement

$$\frac{d(nt+\varepsilon)}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt},$$

pourvu que, dans la dérivée partielle de R par rapport à a, on ne tienne aucun compte de la variation du coefficient n.

Digitized by Google

On voit donc que, $nt + \varepsilon$ se rapportant toujours au mouvement elliptique, on devra, dans le cas du mouvement troublé, prendre $\int ndt + \varepsilon$ pour l'anomalie moyenne, et, par conséquent, substituer $\int ndt$ à nt, ce qui aura l'avantage d'empêcher que le temps t ne sorte hors des signes périodiques *sin* et *cosin*, et, par conséquent, qu'il ne s'introduise, dans le calcul, des inégalités croissant sans limites avec t, c'est-à-dire *séculaires*.

Soit

$$\rho = \int ndt,$$

d'où

$$d\rho = ndt.$$

En substituant pour n sa valeur $a^{-\frac{3}{2}}$ et différentiant, on en conclura

$$d^2\rho = dn\,dt = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\,dadt = -\frac{3}{a^2}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,dt^2;$$

par suite, on aura, pour la variation finie du moyen mouvement dans l'orbite troublée,

$$\rho = -3\int\int\frac{1}{a^2}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,dt^2,$$

ou

$$\rho = -3\int\int an^2\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,dt^2,$$

en vertu de la relation $n^2a^3 = 1$.

Digitized by Google

III. — Transformation des expressions de $d\varepsilon$, de, $d\theta$ et $d\varphi$ dans le cas ou l'excentricité des orbites et leur inclinaison sur un plan fixe sont très petites.

On peut varier de différentes manières la forme des équations (A), suivant le choix des arbitraires que l'on adopte. Nous nous contenterons d'indiquer ici les transformations que l'on est convenu de faire subir aux expressions de $d\varepsilon$, de, $d\theta$, et $d\varphi$, pour délivrer leurs dénominateurs des termes e et $\sin\varphi$ qui les affectent, termes qui, relativement aux planètes, sont toujours de très petites quantités.

Pour faire disparaître des valeurs de $d\varepsilon$ et de le très petit diviseur e, nous poserons

$$\alpha = e \sin\omega, \qquad \beta = e \cos\omega,$$

d'où

$$d\alpha = e \cos\omega \, d\omega + \sin\omega \, de,$$
$$d\beta = -e \sin\omega \, d\omega + \cos\omega \, de;$$

l'équation identique

$$\frac{dR}{de} de + \frac{dR}{d\omega} d\omega = \frac{dR}{d\alpha} d\alpha + \frac{dR}{d\beta} d\beta$$

donnera alors, en y substituant pour $d\alpha$ et $d\beta$ leurs valeurs ci-dessus, et égalant dans les deux membres les coefficients de de et de $d\omega$,

$$\frac{dR}{de} = \sin\omega \frac{dR}{d\alpha} + \cos\omega \frac{dR}{d\beta},$$
$$\frac{dR}{d\omega} = \alpha \frac{dR}{d\beta} - \beta \frac{dR}{d\alpha}.$$

Digitized by Google

Portant ces valeurs de $\frac{dR}{de}$ et de $\frac{dR}{d\omega}$ dans celles de $d\omega$ et de de, et les valeurs résultantes dans les expressions de $d\alpha$ et de $d\beta$, on trouvera, en négligeant les termes d'ordres supérieurs,

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} d\alpha &= an \frac{dR}{d\beta} dt, \\ d\beta &= -an \frac{dR}{d\alpha} dt. \end{aligned} \right.$$

Pour faire disparaître des valeurs de $d\varphi$ et de $d\theta$ le très petit diviseur $\sin\varphi$, nous poserons semblablement

$$p = \sin\varphi \sin\theta, \quad q = \sin\varphi \cos\theta,$$

d'où

$$dp = \sin\varphi \cos\theta \, d\theta + \cos\varphi \sin\theta \, d\varphi,$$
$$dq = -\sin\varphi \sin\theta \, d\theta + \cos\varphi \cos\theta \, d\varphi.$$

Nous aurons d'ailleurs, en considérant R comme une fonction de θ et φ, et ensuite comme une fonction de p et q,

$$\frac{dR}{d\theta} d\theta + \frac{dR}{d\varphi} d\varphi = \frac{dR}{dp} dp + \frac{dR}{dq} dq,$$

expression qui donnera, en y mettant pour dp et dq leurs valeurs ci-dessus,

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dR}{dp} \cos\varphi \sin\theta + \frac{dR}{dq} \cos\varphi \cos\theta,$$
$$\frac{dR}{d\theta} = q \frac{dR}{dp} - p \frac{dR}{dq}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de $d\theta$ et de $d\varphi$, et les équa-

Digitized by Google

tions résultantes dans dp et dq, on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} dp &= \frac{an\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{dq}\,dt,\\ dq &= -\frac{an\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{dp}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on suppose $\varphi = 0$, auquel cas la position de la planète se trouve rapportée au plan de son orbite primitive, ces équations se réduisent aux suivantes:

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} dp &= \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{dq}\,dt,\\ dq &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{dp}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Ce sont ces dernières équations que nous emploierons de préférence à celles qui donnent directement $d\varphi$ et $d\theta$.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Application de la méthode de Jacobi à la détermination des variations des éléments elliptiques.

I. — Variations différentielles des constantes arbitraires sous la forme canonique.

On passe des équations différentielles (E), Chap. III, livre I, qui définissent sous forme canonique le mouvement non troublé ou elliptique, aux équations du mouvement troublé, en ajoutant à la fonction des forces donnée U une seconde fonction $\mathcal{R}$ dite fonction perturbatrice, ce qui revient évidemment à remplacer, dans les équations dont nous parlons, H par H — $\mathcal{R}$. Les six arbitraires canoniques

$$G, H, C, g, h, c$$

qui, dans le mouvement elliptique, étaient regardées comme des constantes, deviendront ici variables, et, d'après un théorème bien connu de Jacobi (*a*), les variations de ces six quantités seront fournies par le système des six équations différentielles

$$(\mathcal{A})\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dG}, \\[2ex] \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dh}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dH}, \\[2ex] \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dc}, & \dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dC}, \end{array}\right.$$

(*a*) C.-G.-J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik.*

Digitized by Google

système qui est de même forme que celui (E), c'est-à-dire *canonique*.

Ces formules donnent immédiatement les variations de chaque élément canonique en fonction des dérivées de $\mathcal{R}$ par rapport à ces mêmes éléments. Mais, dans le calcul des perturbations planétaires, ce sont les variations des éléments elliptiques a, e, ε, ω, θ, φ en fonction de $\frac{d\mathcal{R}}{da}, \frac{d\mathcal{R}}{de} \cdots \frac{d\mathcal{R}}{d\varphi}$ qu'il importe de connaître. C'est donc à un changement d'arbitraires que nous allons avoir recours.

Avant de l'effectuer, nous ferons une remarque essentielle pour l'intégration des équations ($\mathfrak{A}$).

Les valeurs de r et de v, exprimées en fonction de t, sont composées d'une partie constante et d'une suite de termes périodiques renfermant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne, que l'on peut représenter par $n(t+c)$. Après la substitution des valeurs de x, y, z dans $\mathcal{R}$, cette fonction dépendra donc des quantités r et v, et sera, par conséquent, une fonction périodique de $n(t+c)$. Or, comme le coefficient n qui multiplie t ne dépend que de C, il est clair que quand, dans la dernière des équations ($\mathfrak{A}$), on viendra à prendre la dérivée de $\mathcal{R}$ par rapport à C, le temps t sortira hors des signes trigonométriques, c'est-à-dire deviendra facteur dans les coefficients du sinus et du cosinus, ce qui constitue, comme on sait, un grave inconvénient au point de vue des approximations. On peut l'éviter en substituant à l'arbitraire c la variable l qui est liée à c par la relation

$$(1) \qquad l = n(t+c);$$

mais alors les équations qui en résultent n'ont plus la forme

Digitized by Google

canonique, et une nouvelle transformation est nécessaire pour les y ramener. C'est ce calcul que nous allons effectuer avant de passer à l'intégration des équations (2).

On a, d'après l'équation (1),

$$\frac{dl}{dt} = n\left(1 + \frac{dc}{dt}\right) + (t + c)\frac{dn}{dC}\frac{dC}{dt};$$

et comme

$$\frac{d\mathcal{R}}{dc} = n\frac{d\mathcal{R}}{dl}, \qquad \frac{dC}{dt} = n\frac{d\mathcal{R}}{dl},$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d\mathcal{R}}{dc} = n\frac{d\mathcal{R}}{dl},$$

il en résulte

$$\frac{dl}{dt} = n\left(1 + \frac{dc}{dt}\right) + n(t + c)\frac{d\mathcal{R}}{dl}\frac{dn}{dC}.$$

On a d'ailleurs, en désignant par $\left(\frac{d\mathcal{R}}{dC}\right)$ la dérivée partielle de $\mathcal{R}$ prise par rapport à C, mais sans faire varier C dans l,

$$\frac{d\mathcal{R}}{dC} = \left(\frac{d\mathcal{R}}{dC}\right) + \frac{d\mathcal{R}}{dl}(t + c)\frac{dn}{dC},$$

d'où, en remarquant que $\frac{dc}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}}{dC}$,

$$\frac{dc}{dt} = -\left(\frac{d\mathcal{R}}{dC}\right) - \frac{d\mathcal{R}}{dl}(t + c)\frac{dn}{dC}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{dc}{dt}$ dans l'expression ci-dessus de $\frac{dl}{dt}$, on obtient

$$(2) \qquad \frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{d\mathcal{R}}{dC}\right).$$

Digitized by Google

Ainsi, aux deux dernières équations ($\mathfrak{A}$) on peut substituer les deux suivantes :

$$(3) \qquad \frac{dC}{dt} = n\frac{d\mathfrak{R}}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dC}\right),$$

dont les dérivées $\frac{d\mathfrak{R}}{dl}$ et $\frac{d\mathfrak{R}}{dC}$ sont maintenant périodiques, mais qui ont perdu cet avantage précieux de n'être plus exprimées sous forme canonique. Pour les ramener à cette forme, nous poserons encore

$$(4) \qquad l = \rho + \chi = n(t + c); \quad \rho = nt, \quad \chi = nc.$$

Nous aurons alors

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\chi}{dt},$$

ou

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{d\chi}{dt},$$

et la seconde des équations (3) se trouvera transformée dans la suivante :

$$(5) \qquad \frac{d\chi}{dt} = -n\frac{d\mathfrak{R}}{dC},$$

qui est bien de forme canonique.

Au lieu du système d'équations ($\mathfrak{A}$), on peut donc prendre le suivant qui est de même forme :

$$(\mathfrak{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dG}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}}{dg}, & \frac{dg}{dt} = -\frac{d\mathfrak{R}}{dG}, \\ \frac{dH}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}}{dh}, & \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathfrak{R}}{dH}, \\ \frac{dC}{dt} = n\frac{d\mathfrak{R}}{d\chi}, & \frac{d\chi}{dt} = -n\frac{d\mathfrak{R}}{dC}. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

A ces équations, il faut encore joindre celles (4), savoir

$$l = n(t + c) = \rho + \chi, \quad \frac{d\rho}{dt} = n.$$

II. — Transformation du système (3) dans le cas du mouvement troublé de la Lune.

Dans le cas du mouvement de la Lune troublé par la Terre, on emploie, pour ramener les équations (3) à la forme canonique, une transformation qui diffère de la précédente. On pose, L désignant une nouvelle arbitraire,

$$(a) \qquad L = \sqrt{a\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{-2C}},$$

d'où résulte par la différentiation

$$\frac{dL}{dC} = \frac{\mu}{(-2C)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad dL = \frac{dC}{n}.$$

On a donc, au lieu des équations (3),

$$(2) \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{d\mathcal{R}}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = n - \frac{d\mathcal{R}}{dL}.$$

La seconde de ces équations est toujours périodique, mais comme elle renferme un terme n qui est indépendant de $\frac{d\mathcal{R}}{dL}$, on ne peut plus dire quelle soit de forme canonique. On la

Digitized by Google

ramène aisément à cette forme, en posant

$$(3) \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R} - C,$$

car on a alors

$$\frac{d\mathcal{R}'}{dL} = \frac{d\mathcal{R}}{dL} - \frac{dC}{dL},$$

ou

$$\frac{d\mathcal{R}'}{dL} = \frac{d\mathcal{R}}{dL} - n,$$

ce qui donne en substituant dans la valeur de $\frac{dl}{dt}$,

$$(4) \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}'}{dL}.$$

Maintenant, si l'on remarque que

$$\frac{d\mathcal{R}'}{dg} = \frac{d\mathcal{R}}{dg}, \quad \frac{d\mathcal{R}'}{dG} = \frac{d\mathcal{R}}{dG},$$
$$\frac{d\mathcal{R}'}{dh} = \frac{d\mathcal{R}}{dh}, \quad \frac{d\mathcal{R}'}{dH} = \frac{d\mathcal{R}}{dH}, \quad \frac{d\mathcal{R}'}{dl} = \frac{d\mathcal{R}}{dl},$$

on aura, pour les équations qui expriment les variations différentielles des arbitraires canoniques,

$$(\mathfrak{C}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dG}{dt} = \frac{d\mathcal{R}}{dg}, & \frac{dg}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}}{dG}, \\ \frac{dH}{dt} = \frac{d\mathcal{R}}{dh}, & \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}}{dH}, \\ \frac{dL}{dt} = \frac{d\mathcal{R}}{dl}, & \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}}{dL}, \end{array} \right.$$

l'accent de $\mathcal{R}'$ ayant été supprimé pour plus de simplicité.

Quant à la fonction perturbatrice introduite dans ces

Digitized by Google

équations, elle est évidemment égale à

$$\mathcal{R} - C = \mathcal{R} + \frac{\mu}{2a},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(\mathcal{B}) \quad \mathcal{R} = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right].$$

Pour que les équations ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{B}$) puissent convenir au cas du mouvement troublé de la Lune, il faut attribuer aux arbitraires g, h, l, les significations suivantes :

g doit représenter l'angle compris entre la ligne des nœuds sur un plan fixe et le grand axe de l'orbite lunaire ;

h l'angle compris entre la ligne des nœuds et une droite fixe, située dans le plan fixe ;

l l'anomalie moyenne de la Lune à l'origine du temps.

En même temps m', x, x', y, y', etc. doivent représenter :

m' la masse du Soleil ;

x, y, z, les coordonnées rectangulaires du centre de gravité de la Lune, rapportées au centre de la Terre ;

x', y', z', les coordonnées du centre du Soleil, rapportées aux mêmes axes et à la même origine que x, y, z ;

r et r' les distances respectives de la Lune et du Soleil au centre de la Terre ;

ρ la distance du Soleil à la Lune ;

μ la somme $M + m$ des masses de la Terre et de la Lune.

Quant aux variables G, H, L, elles devront être regardées comme des fonctions des trois quantités a, e, i, qui repré-

Digitized by Google

sentent respectivement le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison sur le plan fixe de l'orbite lunaire. On a, en effet, d'après les équations (23) de la page 89,

$$L = \sqrt{a\mu}, \qquad G = L\sqrt{1 - e^2}, \qquad H = G \cos i.$$

C'est à la forme des équations ($\mathfrak{C}$) et à l'expression précédente de $\mathcal{R}$ que s'est arrêté Delaunay dans sa *Théorie du mouvement de la Lune autour de la Terre*. Nous dirons un peu plus loin comment ce grand géomètre est parvenu à surmonter les difficultés analytiques que lui présentait l'intégration du système des équations ($\mathfrak{C}$), et nous exposerons la méthode qu'il a suivie pour développer en série convergente la fonction des forces perturbatrices $\mathcal{R}$.

III. — Changement d'arbitraires.

Nous allons maintenant, en considérant le système des équations ($\mathfrak{S}$) qui se rapporte au mouvement troublé d'une planète m', effectuer le changement de variables dont nous avons parlé au paragraphe I, changement qui consiste, comme nous l'avons dit, dans la détermination des dérivées

$$\frac{da}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{de}{dt} \cdots \frac{d\varphi}{dt},$$

en fonction de

$$\frac{d\mathcal{R}}{da}, \quad \frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon}, \quad \frac{d\mathcal{R}}{de} \cdots \frac{d\mathcal{R}}{d\varphi}.$$

Digitized by Google

Or, si l'on différentie les équations (22) de la page (89), qui expriment les relations existant entre les arbitraires usuelles et celles canoniques, puis qu'on ait égard aux relations inverses (21), on obtiendra

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{2a^2}{\mu}\frac{dC}{dt},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\chi}{dt}+\frac{dh}{dt}+\frac{dg}{dt},\\
&\frac{de}{dt}=\frac{a(1-e^2)}{\mu e}\frac{dC}{dt}-\frac{an\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\frac{dG}{dt},\\
&\frac{d\omega}{dt}=\frac{dh}{dt}+\frac{dg}{dt},\\
&\frac{d\theta}{dt}=\frac{dh}{dt},\\
&\frac{d\varphi}{dt}=\frac{an\cos\varphi}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dG}{dt}-\frac{an}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dH}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

A la simple inspection de ces formules, on reconnaît que

$$\frac{da}{dG}=0,\ \frac{da}{dH}=0,\ \frac{da}{dC}=\frac{2a^2}{\mu},\ \frac{da}{dg}=0,\ \frac{da}{dh}=0,\ \frac{da}{d\chi}=0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dG}=0,\ \frac{d\varepsilon}{dH}=0,\ \frac{d\varepsilon}{dC}=0,\ \frac{d\varepsilon}{dg}=1,\ \frac{d\varepsilon}{dh}=1.\ \frac{d\varepsilon}{d\chi}=1,$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{an\sqrt{1-e^2}}{\mu e},\ \frac{de}{dH}=0,\ \frac{de}{dC}=\frac{a(1-e^2)}{\mu e},\ \frac{de}{dg}=0,\ \frac{de}{dh}=0,$$

$$\frac{de}{d\chi}=0.$$

$$\frac{d\omega}{dG}=0,\ \frac{d\omega}{dH}=0,\ \frac{d\omega}{dC}=0,\ \frac{d\omega}{dg}=1,\ \frac{d\omega}{dh}=1,\ \frac{d\omega}{d\chi}=0,$$

$$\frac{d\theta}{dG}=0,\ \frac{d\theta}{dH}=0,\ \frac{d\theta}{dC}=0,\ \frac{d\theta}{dg}=0,\ \frac{d\theta}{dh}=1,\ \frac{d\theta}{d\chi}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dG}=\frac{an\cos\varphi}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi},\quad \frac{d\varphi}{dH}=-\frac{an}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dC}=0,\ \frac{d\varphi}{dg}=0,\ \frac{d\varphi}{dh}=0,\ \frac{d\varphi}{d\chi}=0.$$

Digitized by Google

On a d'ailleurs

$$\frac{d\mathcal{R}}{dG}=\frac{d\mathcal{R}}{da}\frac{da}{dG}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dG}+\frac{d\mathcal{R}}{de}\frac{de}{dG}+\frac{d\mathcal{R}}{d\omega}\frac{d\omega}{dG}+\frac{d\mathcal{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dG}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dG},$$

$$\frac{d\mathcal{R}}{dH}=\frac{d\mathcal{R}}{da}\frac{da}{dH}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dH}+\frac{d\mathcal{R}}{de}\frac{de}{dH}+\frac{d\mathcal{R}}{d\omega}\frac{d\omega}{dH}+\frac{d\mathcal{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dH}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dH},$$

$$\frac{d\mathcal{R}}{d\chi}=\frac{d\mathcal{R}}{da}\frac{da}{d\chi}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\chi}+\frac{d\mathcal{R}}{de}\frac{de}{d\chi}+\frac{d\mathcal{R}}{d\omega}\frac{d\omega}{d\chi}+\frac{d\mathcal{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{d\chi}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\chi};$$

en sorte que

$$(b)\left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{R}}{dG}&=-\frac{an\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\frac{d\mathcal{R}}{de}+\frac{an\cos\varphi}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi},\\
\frac{d\mathcal{R}}{dH}&=-\frac{an}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi},\\
\frac{d\mathcal{R}}{dC}&=\frac{2a^2}{\mu}\frac{d\mathcal{R}}{da}+\frac{a(1-e^2)}{\mu e}\frac{d\mathcal{R}}{de},\\
\frac{d\mathcal{R}}{dg}&=\frac{d\mathcal{R}}{d\omega}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon},\\
\frac{d\mathcal{R}}{dh}&=\frac{d\mathcal{R}}{d\theta}+\frac{d\mathcal{R}}{d\omega}+\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon},\\
\frac{d\mathcal{R}}{d\chi}&=\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon}.
\end{aligned}\right.$$

Mettant dans les équations (a), à la place de $\frac{dG}{dt}, \frac{dH}{dt}\cdots\frac{d\chi}{dt}$, leurs valeurs fournies par les équations $(\mathcal{B})$, puis ayant égard aux relations (b), on trouve

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2n}{\mu}\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{an\sqrt{1-e^2}-an(1-e^2)}{\mu e}\frac{d\mathcal{R}}{de}-\frac{2a^2n}{\mu}\frac{d\mathcal{R}}{da}$$
$$+\frac{an(1-\cos\varphi)}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi},$$

Digitized by Google

$$\frac{de}{dt} = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\frac{d\mathcal{R}}{d\omega} + \frac{a(1-e^2) - an\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{an}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\frac{d\mathcal{R}}{de} + \frac{an(1-\cos\varphi)}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{an}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathcal{R}}{d\theta} - \frac{an(1-\cos\varphi)}{\mu\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\left[\frac{d\mathcal{R}}{d\omega} + \frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon}\right].$$

La valeur de $\mathcal{R}$ est $\sum m^{(i)}\,\mathrm{R} = \sum mi\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + r'^2 - \rho^2}{2r'^3}\right)$,

$m^{(i)}$ désignant la masse d'une des planètes perturbatrices ; et si, pour plus de simplicité, on se borne à considérer une seule de ces planètes, celle m', par exemple, on aura enfin

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = 2a^2n\,\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = -2a^2n\frac{m'}{\mu}\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) + \frac{ane\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{de} + \frac{an\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi},\\
&\frac{de}{dt} = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\omega} - \frac{ane\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},\\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{de} + \frac{an\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi},\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi},\\
&\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} - \frac{an\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{m'}{\mu}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\omega} + \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right).
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

C'est sous cette forme que les variations différentielles des éléments elliptiques ont été présentées au tome I, page 254, des *Annales de l'Observatoire de Paris.*

En posant

$$e = \sin\psi,$$

d'où

$$\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \cos\psi \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi,$$

on peut encore écrire ces expressions de la manière suivante:

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2a^2n\frac{m'}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -2a^2n\frac{m'}{\mu}\left\{\frac{d\mathrm{R}}{da}\right\},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{m'}{\mu}\frac{an}{\operatorname{tang}\psi}\frac{d\mathrm{R}}{d\omega} - \frac{m'}{\mu}an\cos\psi\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{m'}{\mu}\frac{an}{\operatorname{tang}\psi}\frac{d\mathrm{R}}{de} + \frac{m'}{\mu}\frac{an\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\cos\psi}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi},\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{m'}{\mu}\frac{an}{\cos\psi\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{m'}{\mu}\frac{an}{\cos\psi\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} - \frac{m'}{\mu}\frac{an\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\cos\psi}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\omega}+\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right).
\end{aligned}\right.$$

Dans les équations (A) et (B), nous avons placé la dérivée $\frac{d\mathrm{R}}{da}$ entre crochets, pour rappeler que l'on peut, en la formant, ne pas faire varier a dans l'expression de la longitude moyenne

Digitized by Google

$nt + \varepsilon$, pourvu que la partie nt de cette longitude soit, dans le mouvement troublé, remplacée par $\int nt = \rho$. Quant à cette valeur de ρ, elle est déterminée par la formule

$$\rho = -3 \int\int an^2 \frac{dR}{d\varepsilon} dt^2.$$

Digitized by Google

LIVRE III

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION DES FORCES PERTURBATRICES

CHAPITRE I

Expression de la fonction perturbatrice dans le cas d'orbites peu inclinées et d'une faible excentricité

I. — De la fonction perturbatrice et de sa nature

La fonction R des masses et des distances, qui figure aux seconds membres des équations du mouvement troublé, a la propriété, par ses dérivées partielles, de représenter les actions qu'exerçent les planètes m', m''... sur celle m; on la nomme fonction des forces perturbatrices ou simplement *fonction perturbatrice*. Toute la théorie des perturbations repose sur la considération de cette fonction particulière.

Comme nous venons de le voir, les dérivées de cette fonction, prises par rapport aux éléments de l'orbite elliptique a, ε, e, ω, θ, φ, sont les facteurs qui multiplient l'élément dt dans les formules qui expriment les variations différentielles de ces éléments. Pour obtenir les variations finies de a, ε, e..., il faudrait donc pouvoir substituer dans R, à la place de r, r' et de v, v', leurs valeurs respectives en fonction des mêmes éléments ou leurs valeurs corrigées de toutes les perturbations. Admettons

Digitized by Google

pour un moment la possibilité de cette substitution. Il est clair que ces valeurs de r, r', v, v', quelles qu'elles puissent être, seront nécessairement des fonctions de la masse perturbatrice m', du temps t, et des éléments elliptiques, tels qu'ils ont lieu à l'origine du temps. En les supposant développées par rapport à cette masse, on aura donc

$$r = \Theta + \Theta_1 m' + \Theta_2 m'^2 + \Theta_3 m'^3 + \ldots$$
$$v = \Phi + \Phi_1 m' + \Phi_2 m'^2 + \Phi_3 m'^3 + \ldots$$

Les premiers termes Θ et Φ de ces séries sont les valeurs de r et de v relatives à la supposition de $m' = 0$ ou au mouvement non troublé de m ; et, comme la fonction R est du premier ordre par rapport à m', on voit que si, dans une *première approximation*, on néglige les puissances des masses perturbatrices supérieures à la première, il suffira de substituer dans cette fonction à la place de r et de v leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, c'est-à-dire $\Theta\ (a, \varepsilon, e, \omega, \rho)$ pour r et $\Phi\ (\varepsilon, e, \omega, \rho)$ pour v. Dans ce cas, la fonction R peut toujours se réduire en une suite infinie de termes de la forme

$$m' \mathfrak{P} \cos (i'n't - int + \mathfrak{A}),$$

termes dans lesquels nt et $n't$ représentent les moyens mouvements de la planète troublée et de la planète perturbatrice, et i, i' des nombres entiers qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles, positives et négatives, y compris zéro ; $\mathfrak{P}$, et $\mathfrak{A}$ sont des coefficients fonctions des éléments des orbites de m et de m', mais indépendants du temps t. Si l'on voulait ensuite former une *seconde approximation*, ou avoir égard à la première puissance des forces perturbatrices, il faudrait subtituer dans R, à la place de r et de v, les valeurs obtenues dans la pre-

Digitized by Google

mière approximation. On formerait une *troisième approximation*, en ayant égard aux secondes dimensions des masses, c'est-à-dire en substituant dans R, à la place des variables r et v, leurs valeurs données par la seconde approximation, et ainsi de suite. Généralement, les deux premières approximations suffisent dans la théorie des planètes; mais il n'en est pas de même dans la théorie de la Lune, où la grandeur des inégalités et le peu de convergence des séries obligent à pousser beaucoup plus loin le développement de R par rapport aux forces perturbatrices. Laplace, dans la *Mécanique céleste*, s'est arrêté aux termes du quatrième ordre inclusivement, mais il a conservé ceux du cinquième qui se sont présentés d'eux-mêmes. Plana, dans sa théorie de la Lune, est allé jusqu'aux termes du cinquième ordre, et même jusqu'à ceux du huitième, lorsque la chose lui a paru nécessaire. Hansen, dans ses *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam Luna perlustrat*, n'a pas dépassé le quatrième ordre; enfin Delaunay, dans sa *Théorie du mouvement de la Lune*, a poussé les approximations beaucoup plus loin, et, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, il a considéré les termes du septième ordre inclusivement et même ceux du huitième et du neuvième, pour certaines inégalités dépendantes de la longitude.

II. — Forme générale du développement de R dans le cas des planètes

Ne considérons, pour simplifier, que l'action réciproque de deux planètes m et m' en mouvement autour du Soleil. En

Digitized by Google

désignant toujours par R la fonction des forces perturbatrices, et posant

$$\rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

on aura

$$R = m' \left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + r'^2 - \rho^2}{2r'^3}\right).$$

On aura aussi en appelant s l'angle formé au centre de gravité du soleil par les deux rayons vecteurs r et r',

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos s.$$

Soient v et v' les longitudes des planètes m et m', comptées dans les plans de leurs orbites respectives à partir d'un axe fixe ; γ l'inclinaison mutuelle des orbites, et τ, τ' les longitudes du nœud commun aux orbites de m et de m'. Par la considération du triangle sphérique ayant deux côtés $v - \tau$, $v' - \tau'$ et l'angle compris γ, on aura pour calculer le côté s opposé à l'angle γ

$$\cos s = \cos(v - \tau)\cos(v' - \tau') + \sin(v - \tau)\sin(v' - \tau')\cos\gamma,$$

ou bien, en remplaçant les produits de sinus ou de cosinus par des sommes et mettant $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma$ à la place de $\cos\gamma$,

$$\cos s = \cos(v' - v + \tau - \tau') + [\cos(v' + v - \tau - \tau') - \cos(v' - v - \tau + \tau')]\sin^2\frac{1}{2}\gamma.$$

A cause de la petitesse du facteur $\sin^2\frac{1}{2}\gamma$, on peut faire

Digitized by Google

$\tau' = \tau$, ce qui donne en posant pour simplifier $\sin^2 \frac{1}{2}\gamma = \eta^2$ et substituant dans ρ

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v) - 2rr'\eta^2 [\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)].$$

Portant cette valeur de ρ dans l'expression ci-dessus de R, on a donc

$$R = m' \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v) - 2rr'\eta^2 [\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)]}} - \frac{r}{r'^2} \left\{ \cos(v' - v) + \eta^2 [\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)] \right\} \right.$$

Quand à l'angle γ qui entre implicitement dans η, il est aisé d'en déterminer la valeur en fonction des inclinaisons φ, φ' des deux orbites au plan des xy, et des longitudes θ, θ' des nœuds ascendants de ces orbites. Si l'on considère, en effet, le triangle sphérique dans lequel le côté $\theta' - \theta$ et les deux angles adjacents à ce côté φ' et $180° - \varphi$ sont connus, on a pour calculer l'angle γ opposé à ce côté

$$\cos \gamma = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cos(\theta' - \theta).$$

L'inclinaison mutuelle des orbites de m et de m' étant toujours très faible, on peut développer R suivant les puissances de η en une série très convergente, et en posant pour abréger

$$\chi = \frac{1}{2}\left[\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)\right],$$

$$\Theta = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v),$$

Digitized by Google

on obtient

$$
\begin{aligned}
R = m' & \left\{\Theta^{-\frac{1}{2}} - \frac{rr'}{r'^3}\cos(v'-v)\right\} \\
& + m'\left\{2\eta^2\chi rr'\Theta^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{r'^3}\right\} \\
& + m'\left\{6\eta^4\chi^2 r^2 r'^2\Theta^{-\frac{5}{2}}\right\} \\
& + m'\left\{20\eta^6\chi^3 r^3 r'^3\Theta^{-\frac{7}{2}}\right\} \\
& + m'\left\{70\eta^8\chi^4 r^4 r'^4\Theta^{-\frac{9}{2}}\right\} \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Sous cette forme, et en négligeant les termes en η, on voit que R ne dépend que de r, r', v, v' et γ.

III. — Développement de l'expression précédente en série ordonnée suivant les puissances des excentricités

L'expression précédente de R se rapporte aux inclinaisons. Occupons-nous actuellement de la développer par rapport aux excentricités.

Posons

$$
\begin{aligned}
r &= a + a\mu, \\
r' &= a' + a'\mu', \\
v &= l + \nu, \\
v' &= l' + \nu',
\end{aligned}
$$

μ, μ', ν, ν', étant de très petites quantités dépendantes des excentricités de m et de m', et l, l' désignant les longitudes moyennes $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$ de ces deux planètes.

Digitized by Google

En substituant ces valeurs de r, r', v et v' dans l'expression de R, et négligeant d'abord μ, μ', ν et ν', ce qui revient à supposer les orbites circulaires, on aura, en appelant R_0 ce que devient R dans ce cas,

$$\begin{aligned} R_0 &= m'\left\{\Theta_0^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{a'^2}\cos(l' - l)\right\} \\ &+ m' 2\eta^2 \chi_0\, a a' \left\{\Theta_0^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a'^3}\right\} \\ &+ m' 6\eta^4 \chi^2 a^2 a'^2 \Theta_0^{-\frac{5}{2}} \\ &+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les valeurs de χ_0 et Θ_0 étant

$$\chi_0 = \frac{1}{2}\left[\cos(l' + l - 2\tau) - \cos(l' - l)\right],$$
$$\Theta_0 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(l' - l).$$

Pour passer de ce cas à celui où les orbites sont excentriques, il faut attribuer aux quantités a, a', l, l' les accroissements $a\mu$, $a'\mu'$, ν et ν'. Or soit (*a*)

$$\Theta_0^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{a'^2}\cos(l' - l) = \frac{1}{2}\sum A^{(i)}\cos i\,(l' - l),$$
$$\Theta_0^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a'^3} = \frac{1}{2}\sum B^{(i)}\cos i\,(l' - l),$$
$$\Theta_0^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sum C^{(i)}\cos i\,(l' - l),$$

(*a*) La quantité $\Theta_0^{-\mu}$, étant réductible à la forme

$$\frac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos(l' - l) + A^{(2)}\cos 2(l' - l) + \ldots$$

Digitized by Google

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de i, positives ou négatives, y compris zéro, et $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ étant des coefficients tels que

$$A^{(-i)} = A^{(i)}, \qquad B^{(-i)} = B^{(i)}, \qquad C^{(-i)} = C^{(i)} \ldots,$$

c'est-à-dire jouissant de la propriété d'acquérir des valeurs égales pour des valeurs de i égales et de signes contraires.

Si l'on observe que le produit de

$$\sum A^{(i)} \cos i\,(l' - l)$$

par le sinus ou le cosinus d'un angle quelconque σ est

$$(a) \qquad \sum A^{(i)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left\{ i\,(l' - l) + \sigma \right\},$$

on a, en remarquant que $\cos i\,(l' - l) = \cos[-i\,(l' - l)]$,

$$\begin{aligned}\Theta_0^{-\mu} = \frac{1}{2} A^{(0)} &+ \frac{1}{2} A^{(1)} \{[\cos(l' - l) + \cos[-(l' - l)]\} \\ &+ \frac{1}{2} A^{(2)} \{\cos 2(l' - l) + \cos[-2(l' - l)]\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On a d'ailleurs généralement $A^{(i)} = A^{(-i)}$, ce qui change l'expression précédente de $\Theta_0^{-\mu}$ dans la suivante

$$\begin{aligned}\Theta_0^{-\mu} = \frac{1}{2} A^{(0)} &+ \frac{1}{2} A^{(1)} \cos(l' - l) + \frac{1}{2} A^{(2)} \cos 2(l' - l) + \ldots \\ &+ \frac{1}{2} A^{(-1)} \cos[-(l' - l)] + \frac{1}{2} A^{(-2)} \cos[-2(l' - l)] + \ldots;\end{aligned}$$

le nombre i doit s'étendre ici à toutes les valeurs entières comprises depuis $i = -\infty$ jusqu'à $i = +\infty$. En y renfermant la valeur $i = 0$, on pourra donc écrire

$$\Theta_0^{-\mu} = \frac{1}{2} \sum A^{(i)} \cos i\,(l' - l).$$

Digitized by Google

et que de plus

$$(b) \qquad \sin\sigma \sum A^{(i)} \sin i(l'-l) = -\sum A^{(i)} \cos[i(l'-l)+\sigma]\,(^a)$$

on aura, après avoir substitué dans R_0 la valeur ci-dessus de χ_0,

$$\begin{aligned} R_0 = & \frac{m'}{2} \sum A^{(i)} \cos i\,(l'-l) \\ & -\frac{m'}{2} \sum \eta^2 a a' B^{(i-1)} \cos i\,(l'-l) \\ & +\frac{m'}{2} \sum \eta^2 a\, a' B^{(i-1)} \cos \left\{ i(l'-l) + 2l - 2\tau \right\} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considérons le premier terme de ce développement, et posons

$$R = \frac{m'}{2} \sum A^{(i)} \cos i\,(l'-l).$$

(a) Ces relations sont bien faciles à vérifier. On a, en effet, pour les deux séries que renferme l'expression (a)

$$\begin{aligned} & \frac{\sin}{\cos}\,\sigma \sum A^{(i)} \cos i\,(l'-l) \\ & = \frac{1}{2} \sum A^{(i)} \frac{\sin}{\cos} \{i\,(l'-l) + \sigma\} \\ & + \frac{1}{2} \sum A^{(i)} \frac{\sin}{\cos} \{i\,(l'-l) - \sigma\}. \end{aligned}$$

D'après la définition du nombre i, on peut changer dans chacun des termes de cette somme i en $-i$. Or si l'on fait cette substitution dans le second terme, on reproduit le premier, car $A^{(-i)} = A^{(i)}$. On a donc généralement

$$\frac{\sin}{\cos}\,\sigma \sum A^{(i)} \cos i\,(l'-l) = \sum A^{(i)} \frac{\sin}{\cos} \{i\,(l'-l) + \sigma\}.$$

La démonstration de la formule (b) repose sur des considérations absolument semblables.

Digitized by Google

$A^{(i)}$ étant évidemment une fonction de a et de a', R doit dépendre des variables a, a' et $(l'-l)$. Or, si l'on désigne par V une fonction de trois variables x, y, z, on sait que lorsque x, y, z prennent respectivement les accroissements h, j, k, c'est-à-dire se changent en $x+h$, $y+j$, $z+k$, V devient

$$\begin{aligned}
&V+\frac{dV}{dx}h+\frac{dV}{dy}j+\frac{dV}{dz}k\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}h^2+\frac{d^2V}{dy^2}j^2+\frac{d^2V}{dz^2}k^2\right.\\
&\qquad\left.+2\frac{d^2V}{dydz}jk+2\frac{d^2V}{dxdz}hk+2\frac{d^2V}{dxdy}hj\right)\\
&+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3V}{dx^3}h^3+\frac{d^3V}{dy^3}j^3+\frac{d^3V}{dz^3}k^3\right.\\
&\qquad+3\frac{d^3V}{dydz^2}jk^2+3\frac{d^3V}{dzdy^2}kj^2+3\frac{d^2V}{dxdz^2}hk^2\\
&\qquad+3\frac{d^3V}{dzdx^2}kh^2+3\frac{d^3V}{dydx^2}jh^2\\
&\qquad\left.+3\frac{d^3V}{dxdy^2}hj^2+6\frac{d^3V}{dxdydz}hjk\right)\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour le développement de la fonction R des trois variables a, a', $l'-l$, ordonné suivant les puissances et les produits de leurs accroissements respectifs $a\mu$, $a'\mu'$, $\nu'-\nu$, on aura donc

$$\begin{aligned}
R=&\frac{m'}{2}\sum A^{(i)}\cos i\,(l'-l)\\
&+\frac{m'}{2}\mu\sum a\frac{dA^{(i)}}{da}\cos i\,(l'-l)\\
&+\frac{m'}{2}\mu'\sum a'\frac{dA^{(i)}}{da'}\cos i\,(l'-l)\\
&-\frac{m'}{2}(\nu'-\nu)\sum i\,A^{(i)}\sin i\,(l'-l)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+\frac{1}{2}\Big[\frac{m'}{4}\mu^2\sum a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\cos i\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{4}\mu'^2\sum a'^2\frac{d^2A^{(i)}}{da'^2}\cos i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{4}(\nu'-\nu)^2\sum i^2A^{(i)}\cos i\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{2}\mu\mu'\sum aa'\frac{d^2A^{(i)}}{dada'}\cos i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{2}\mu(\nu'-\nu)\sum ia\frac{dA^{(i)}}{da}\sin i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{2}\mu'(\nu'-\nu)\sum ia'\frac{dA^{(i)}}{da'}\sin i\,(l'-l)\Big]$$

$$+\frac{1}{6}\Big[\frac{m'}{12}\mu^3\sum a^3\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\cos i\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{12}\mu'^3\sum a'^3\frac{d^3A^{(i)}}{da'^3}\cos i\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{12}(\nu'-\nu)^3\sum i^3A^{(i)}\sin i\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{4}\mu^2\mu'\sum a^2a'\frac{d^3A^{(i)}}{da^2da'}\cos i\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{4}\mu'^2\mu\sum a'a^2\frac{d^3A^{(i)}}{dada'^2}\cos i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{4}\mu^2(\nu'-\nu)\sum ia^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\sin i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{4}\mu'^2(\nu'-\nu)\sum ia'^2\frac{d^2A^{(i)}}{da'^2}\sin i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{4}\mu(\nu'-\nu)^2\sum i^2a\frac{dA^{(i)}}{da}\cos i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{4}\mu'(\nu'-\nu)^2\sum i^2a'\frac{dA^{(i)}}{da'}\cos i\,(l'-l)$$

$$-\frac{m'}{4}\mu\mu'(\nu'-\nu)\sum iaa'\frac{d^2A^{(i)}}{dada'}\sin i(l-'l)\Big]$$

$$+\ \text{etc.}\ \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Si l'on substitue maintenant dans ce développement, à la place de

$$\mu,\ \mu',\ \mu^2,\ \mu'^2 \ldots\ \nu' - \nu,\ (\nu' - \nu)^2 \ldots\ \mu(\nu' - \nu),\ \mu'(\nu' - \nu) \ldots$$

leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, valeurs que l'on formera aisément à l'aide des relations qui expriment r', r', v et v', et que nous avons données pages 96 et 97, on obtiendra le développement de R ordonné suivant les puissances et les produits des excentricités, et étendu jusqu'à tel ordre de terme que l'on voudra considérer.

Termes qui sont du premier ordre par rapport aux excentricités

Si l'on se borne, par exemple, à considérer les termes indépendants des excentricités et ceux qui dépendent seulement de la première puissance de ces quantités, cas pour lequel

$$\begin{aligned} r &= a - ae \cos(l - \omega), \\ v &= nt + \varepsilon + 2e \sin(l - \omega), \\ r' &= a' - a'e' \cos(l' - \omega'), \\ v' &= n't + \varepsilon' + 2e' \sin(l' - \omega'), \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \mu &= -\ e \cos(l - \omega), \\ \nu &= \quad 2e \sin(l - \omega), \\ \mu' &= -\ e' \cos(l' - \omega'), \\ \nu' &= \quad 2e' \sin(l' - \omega'), \end{aligned}$$

et, par suite, il viendra pour la portion de R qui dépend des

Digitized by Google

termes dont nous parlons et que nous représenterons par $R_{[0,1]}$,

$$\begin{aligned}
R_{[0,1]} = \frac{m'}{2} \sum A^{(i)} \cos i(l'-l) \\
- \frac{m'}{2} e \cos(l'-\omega) \sum a \frac{dA^{(i)}}{da} \cos i(l'-l) \\
- \frac{m'}{2} e' \cos(l'-\omega') \sum a' \frac{dA^{(i)}}{da'} \cos i(l'-l) \\
- \frac{m'}{2} 2e' \sin(l'-\omega') \sum iA^{(i)} \sin i(l'-l) \\
+ \frac{m'}{2} 2e \sin(l'-\omega) \sum iA^{(i)} \sin i(l'-l),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
R_{[0,1]} = \frac{m'}{2} \sum A^{(i)} \cos i(l'-l) \\
- \frac{m'}{2} \sum \left[a \frac{dA^{(i)}}{da} + 2iA^{(i)} \right] e \cos[i(l'-l)+l-\omega] \\
- \frac{m'}{2} \sum \left[a' \frac{dA^{(i-1)}}{da'} - 2(i-1)A^{(i-1)} \right] e' \cos[i(l'-l)+l-\omega)]^{(a)},
\end{aligned}$$

en vertu des relations (a) et (b).

Pour les applications numériques, il est commode de n'avoir à considérer que les dérivées partielles de $A^{(i)}$, $B^{(i)}$..., relatives à a. Or, si l'on remarque que ces coefficients sont des fonctions homogènes de a et de a', la première du degré -1,

(a) Ce terme se présente d'abord sous la forme

$$-\frac{m'}{2} \sum \left[a' \frac{dA^{(i)}}{da'} - 2iA^{(i)} \right] e' \cos[i(l'-l)+l'-\omega'].$$

On le ramène à celle écrite dans le texte, en remarquant que

$$i(l'-l)+l'-\omega' = (i+1)(l'-l)+l-\omega'.$$

Digitized by Google

la seconde du degré — 3, etc., on sait que

$$a\frac{dA^{(i)}}{da}+a'\frac{dA^{(i)}}{da'}=-A^{(i)},$$

$$a\frac{dB^{(i)}}{da}+a'\frac{dB^{(i)}}{da'}=-3B^{(i)},$$

. . . . . .

d'où l'on tire

$$(c)\qquad a'\frac{dA^{(i)}}{da'}=-A^{(i)}-a\frac{dA^{(i)}}{da},$$

$$(d)\qquad a'\frac{dB^{(i)}}{da'}=-3B^{(i)}-a\frac{dB^{(i)}}{da}.$$

Eu égard à la première de ces valeurs, l'expression précédente de $R_{[0,1]}$ devient donc

$$\begin{aligned}R_{[0,1]}=&\frac{m'}{2}\sum A^{(i)}\cos i\,(l'-l)\\&-\frac{m'}{2}\sum\left[a\frac{dA^{(i)}}{da}+2iA^{(i)}\right]e\cos[i\,(l'-l)+l-\omega)]\\&-\frac{m'}{2}\sum\left[(2i-1)A^{(i-1)}+a\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right]e'\cos[i(l'-l)+l-\omega'].\end{aligned}$$

Soit, en ne considérant que les termes dépendants des excentricités,

$$\begin{aligned}R_{[,1]}=&M^{(0)}e\cos[i(l'-l)+l-\omega]\\&+M^{(1)}e'\cos[i\,(l'-l)+l-\omega'];\end{aligned}$$

alors en posant $\frac{d^nA^{(i)}}{da^n}=A^{(i)}_{[n]}$, on aura

$$M^{(0)}=\frac{m'}{2}[-2iA^{(i)}-aA^{(i)}_{[1]}],$$

$$M^{(1)}=\frac{m'}{2}[(2i-1)A^{(i-1)}+aA^{(i-1)}_{[1]}].$$

Digitized by Google

Termes qui dépendent de la seconde puissance des excentricités

Pour obtenir ces termes, il faudrait prendre

$$\mu = -e\cos(l-\omega) + \frac{e^2}{2}[1-\cos 2(l-\omega)],$$

$$\nu = 2e\sin(l-\omega) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(l-\omega),$$

$$\mu' = -e'\cos(l'-\omega') + \frac{e'^2}{2}[1-\cos 2(l'-\omega')],$$

$$\nu' = 2e'\sin(l'-\omega') + \frac{5}{4}e'^2\sin 2(l'-\omega');$$

on en déduirait les valeurs de μ^2, μ'^2, $\nu'-\nu$, $(\nu'-\nu)^2$, $\mu\mu'$, $\mu(\nu'-\nu)$, $\mu'(\nu'-\nu)$, savoir :

$$\mu^2 = \frac{1}{2}e^2[1+\cos 2(l-\omega)],$$

$$\mu'^2 = \frac{1}{2}e'^2[1+\cos 2(l'-\omega')],$$

$$\nu'-\nu = 2e'\sin(l'-\omega') - 2e\sin(l-\omega),$$

$$(\nu'-\nu)^2 = 2(e^2+e'^2) - 2e^2\cos 2(l-\omega) - 2e'^2\cos 2(l'-\omega')$$
$$+4ee'\cos[(l-\omega)+(l'-\omega')] - 4ee'\cos[(l-\omega)-(l'-\omega')],$$

$$\mu\mu' = \frac{1}{2}ee'\cos[(l-\omega)+(l'-\omega')] + \frac{1}{2}ee'\cos[(l-\omega)-(l'-\omega')],$$

$$\mu(\nu'-\nu) = e^2\sin 2(l-\omega) - ee'\sin[(l-\omega)+(l'-\omega')]$$
$$-ee'\sin[(l-\omega)-(l'-\omega')],$$

$$\mu'(\nu'-\nu) = -e'^2\sin 2(l-\omega') + ee'\sin[(l-\omega)+(l'-\omega')]$$
$$+ee'\sin[(l-\omega)-(l'-\omega')],$$

Digitized by Google

et substituant ces valeurs dans les termes du développement de R qui en sont affectés, on en conclurait, pour la portion de ce développement qui est de l'ordre du carré des excentricités,

$$
\begin{aligned}
R_{[..2]} = \frac{m'}{8}\sum\Big[& i(4i-5)\,A^{(i)} + 2(2i-1)\,a\frac{dA^{(i)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\Big] \\
& \times e^2 \cos\{i(l'-l)+2l-2\omega\} \\
-\frac{m'}{4}\sum\Big[& 4(i-2)^2A^{(i-1)} + 2(i-1)\,a\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\
& -2(i-1)\,a'\frac{dA^{(i-1)}}{da'} - aa'\frac{d^2A^{(i-1)}}{dada'}\Big] \\
& \times ee' \cos\{i(l'-l)+2l-\omega-\omega'\} \\
+\frac{m'}{8}\sum\Big[& (i-2)(4i-3)\,A^{(i-2)} - 2(2i-3)\,a'\frac{dA^{(i-2)}}{da'} \\
& + a'^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da'^2}\Big] \times e'^2 \cos\{i(l'-l)+2l-2\omega'\} \\
-\frac{m'}{4}\sum\Big[& 4i^2A^{(i)} - 2a\frac{dA^{(i)}}{da} - a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\Big] \\
& \times (e^2+e'^2)\cos i(l'-l) \\
+\frac{m'}{4}\sum\Big[& 4(i-1)^2A^{(i-1)} - 2(i-1)a\frac{dA^{(i-1)}}{da} - 2(i-1)a'\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \\
& + aa'\frac{d^2A^{(i-1)}}{dada'}\Big] \times ee' \cos\{i(l'-l)+\omega-\omega'\} \\
+\frac{m'}{4}\sum\Big[& 4(i+1)\,A^{(i+1)} + 2(i+1)\,a\frac{dA^{(i+1)}}{da} \\
& + 2(i+1)\,a'\frac{dA^{(i+1)}}{da'} + aa'\frac{d^2A^{(i+1)}}{dada'}\Big] \\
& \times ee' \cos\{i(l'-l)-\omega+\omega'\}.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Maintenant, si l'on observe que d'après l'équation (c)

$$a'\frac{dA^{(i)}}{da'} = -A^{(i)} - A^{(i)}_{[1]},$$

$$a'\frac{d^2A^{(i)}}{dada'} = -2A^{(i)}_{[1]} - aA^{(i)}_{[2]},$$

$$a'^2\frac{d^2A^{(i)}}{da'^2} = 2A^{(i)} + 4aA^{(i)}_{[1]} + a^2A^{(i)}_{[2]},$$

etc. . . . . .

on aura pour les termes de $R_{[..2]}$ qui sont de la forme

$$\mathfrak{M}\cos[i(l'-l)+2l+\mathfrak{L}],$$

et qui dépendent de la seconde puissance des excentricités,

$$\begin{aligned} R'_{[..2]} = {} & M^{(0)}e^2\cos[i(l'-l)+2l-2\omega] \\ & + M^{(1)}ee'\cos[i(l'-l)+2l-\omega-\omega'] \\ & + M^{(2)}e'^2\cos[i(l'-l)+2l-2\omega'], \end{aligned}$$

expression dans laquelle

$$M^{(0)} = \frac{m'}{8}[i(4i-5)+2(2i-1)aA^{(i)}_{[1]}+a^2A^{(i)}_{[2]}],$$

$$\begin{aligned} M^{(1)} = -\frac{m'}{4}[& (2i-2)(2i-1)A^{(i-1)}+2(2i-1)aA^{(i-1)}_{[1]} \\ & + a^2A^{(i-1)}_{[2]}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{(2)} = +\frac{m'}{8}[& 4i^2-7i+2)A^{(i-2)}+2(2i-1)aA^{(i-2)}_{[1]} \\ & + a^2A^{(i-2)}_{[2]}]. \end{aligned}$$

On aura ensuite pour les termes de $R_{[..2]}$ qui sont de la forme

$$\mathfrak{N}\cos[i(l'-l)+\mathfrak{B}],$$

et qui ont, par conséquent, même argument que les termes

Digitized by Google

indépendants des excentricités,

$$\begin{aligned} R''_{[..2]} = {} & N^{(0)}(e^2 + e'^2)\cos i\,(l' - l) \\ & + N^{(1)}\,ee'\cos[i(l' - l) + \omega - \omega'] \\ & + N^{(2)}\,ee'\cos[i(l' - l) - \omega + \omega'], \end{aligned}$$

expression dans laquelle $N^{(0)}$, $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ ont les valeurs suivantes :

$$N^{(0)} = -\frac{m'}{4}\left[4i^2 A^{(i)} - 2a A^{(i)}_{[1]} - a^2 A^{(i)}_{[2]}\right],$$

$$N^{(1)} = +\frac{m'}{4}\left[(2i-2)(2i-1)\,A^{(i-1)} - 2a\,A^{(i-1)}_{[1]} - a^2 A^{(i-1)}_{[2]}\right],$$

$$N^{(2)} = +\frac{m'}{4}\left[(2i+2)(2i+1)\,A^{(i+1)} - 2a A^{(i+1)}_{[1]} - a^2 A^{(i+1)}_{[2]}\right].$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces développements qui n'offrent, comme l'on voit, d'autres difficultés que celles résultant de la longueur des calculs. Ces calculs deviennent, en effet, d'une extrême complication, à mesure que l'on s'élève dans l'ordre des approximations.

En réunissant la somme des termes $(R'_{[..2]} + R''_{[..2]})$ que nous venons de trouver à celle $R_{[0.1]}$, on aura le développement de la fonction R, étendu jusqu'aux produits et aux secondes puissances des excentricités des orbites de m et de m' dont nous venons de considérer l'action réciproque.

Digitized by Google

IV. — Expression analytique des termes qui dépendent des inclinaisons

Le développement de la fonction

$$(a) \qquad \frac{m'}{2} \sum A^{(i)} \cos i\,(l' - l),$$

en série ordonnée suivant les puissances et les produits des très petits accroissements $a\mu$, $a\mu'$, $\nu' - \nu$, vient de nous fournir les termes de R qui sont de l'ordre des excentricités des orbites. Il nous reste maintenant à considérer les termes qui dépendent des inclinaisons et auxquels donnent naissance la portion de R que nous n'avons pas développée, savoir :

$$R_\gamma = -\frac{m'}{2} \sum \eta^2 aa' B^{(i-1)} \cos i(l' - l)$$
$$+ \frac{m'}{2} \sum \eta^2 aa' B^{(i-1)} \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau].$$

Or si, en n'ayant égard qu'aux termes qui, dans le développement de R, sont de la forme

$$\mathfrak{M} \cos [i(l' - l) + \mathfrak{L}],$$

on pose

$$R_\gamma = M\eta^2 \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau],$$

on aura immédiatement

$$M = \frac{m'}{2} aa' B^{(i-1)}.$$

Relativement aux termes du second ordre par rapport aux

Digitized by Google

inclinaisons, mais dont l'argument est le même que celui des termes indépendants des excentricités, on aura, en posant

$$R_\gamma = N\eta^2 \cos i(l' - l).$$

$$N = -\frac{m'}{2} aa' B^{(i-1)}.$$

Considérons maintenant les termes du troisième ordre qui s'ajoutent à ceux du même ordre dépendants des excentricités. Ces termes résultent du développement de la fonction

$$\frac{m'}{2} \sum \eta^2 aa' B^{(i-1)} \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau.];$$

et, comme cette fonction est déjà du second ordre, il suffira pour obtenir les termes dont nous parlons de la développer seulement suivant les premières puissances des excentricités e et e'. Or le développement de la fonction (a) a été effectué, page 170 ; on en conclura donc celui que nous cherchons en changeant simplement

$$A^{(i)} \text{ en } B^{(i-1)} \quad \text{et} \quad i(l - l) \quad \text{en} \quad i(l' - l) + 2l - 2\tau.$$

On aura ainsi

$$aa' \left\{ \frac{m'}{2} \sum B^{(i-1)} \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau] \right.$$
$$+ \frac{m'}{2} \mu \sum a \frac{dB^{(i-1)}}{da} \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau]$$
$$+ \frac{m'}{2} \mu' \sum a' \frac{aB^{(i-1)}}{da'} \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau]$$
$$\left. - \frac{m'}{2} (\nu' - \nu) \sum iB^{(i-1)} \sin [i(l' - l) + 2l - 2\tau] \right\}.$$

Digitized by Google

Maintenant, si l'on substitue dans ce développement à la place de μ, μ', $(\nu' - \nu)$, leurs valeurs données à la page 175, et qu'on ait égard aux relations (a), (b) et (d), ainsi qu'à celle

$$i(l' - l) + 2l + l' - \omega' - 2\tau = (i+1)(l' - l) + 3l - \omega' - 2\tau,$$

on trouvera, pour la somme R_γ des termes dont nous parlons,

$$\begin{aligned} R_\gamma = {} & \frac{m'}{2} \sum B^{(i-1)} \cos [i(l' - l) + 2l - 2\tau] \\ & - \frac{m'}{4} \sum \left[(2i - 3) B^{(i-1)} + a \frac{dB^{(i-1)}}{da} \right] e\eta^2 \cos [i(l' - l) \\ & \qquad + 3l - \omega - 2\tau] \\ & + \frac{m'}{4} \sum \left[2i B^{(i-2)} + a \frac{dB^{(i-2)}}{da} \right] e'\eta^2 \cos [i(l' - l) + 3l \\ & \qquad - \omega' - 2\tau]. \end{aligned}$$

En posant donc

$$\begin{aligned} R_\gamma = {} & N^{(0)} e\eta^2 \cos [i(l' - l) + 3l - \omega - 2\tau] \\ & + N^1 e'\eta^2 \cos [i(l' - l) + 3l - \omega' - 2\tau], \end{aligned}$$

on aura

$$N^0 = -\frac{m'aa'}{4} \left[(2i - 3) B^{(i-1)} + a B^{(i-1)}_{[1]} \right],$$

$$N^{(1)} = \frac{m'aa'}{4} \left[2i B^{(i-2)} + a B^{(i-2)}_{[1]} \right].$$

Les inclinaisons des orbites planétaires, les unes sur les autres, étant très faibles, les termes dépendants de ces quantités sont généralement forts petits, et, passé le quatrième ordre, on peut regarder leurs valeurs comme tout à fait insensibles. Il peut arriver cependant que, pour certaines circonstances particulières, ces termes d'ordre

Digitized by Google

supérieur acquièrent une valeur relativement sensible, et surpassent même, en grandeur, ceux qui dépendent des excentricités. Ce cas assez singulier se présente dans la théorie du mouvement de la Terre troublé par Vénus, où l'inégalité dépendante de l'angle $13n't - 8nt$, et qui s'élève, d'après les calculs de M. Airy, à 2″94 pour Vénus et à 2″15 pour la Terre, est uniquement due aux termes dépendants de l'inclinaison mutuelle des orbites. Les termes provenant des excentricités et qui, dans toute autre circonstance, seraient sensibles, se combinent ici de telle sorte que leur somme est une quantité extrêmement faible, presque nulle.

V. — Remarques sur la forme du développement de R.

Il nous reste à présenter quelques remarques sur le développement de la fonction R, tel que nous l'avons effectué dans les paragraphes qui précèdent. Les considérations dans lesquelles nous allons entrer seront surtout utiles, dans la recherche, faite *à priori*, des termes du développement de R d'après un argument donné.

Soit

$$(a) \qquad m' \mathfrak{P} \cos (i'n't - int + \mathfrak{A})$$

un terme quelconque de ce développement. Si les orbites de m et de m' étaient circulaires et dans un même plan, les quantités r, r', v, v', seraient respectivement égales à a, a', l, l'; η serait nul et l'on aurait $i' = i$, puisque l'angle $l' - l$ et ses multiples seraient alors les seuls dont le cosinus entrerait dans l'expression de R. D'où l'on voit déjà que i ne peut surpasser i'

Digitized by Google

ou en être surpassé, qu'au moyen des sinus ou des cosinus des termes qui dépendent des inclinaisons.

En se reportant maintenant aux valeurs de r et de v données aux pages 96 et 97, on reconnaît que l'angle l ou $nt + \varepsilon$ est toujours accompagné de l'angle $-\omega$, et par les valeurs de r' et de v', on voit que l'angle $l' = n't + \varepsilon'$ est toujours accompagné de $-\omega'$; d'un autre côté, la valeur de χ qui entre dans R montre que la somme des angles l et l' est toujours accompagnée de l'angle -2τ; $\mathfrak{A}$ prend donc cette forme : $i'\varepsilon - i\varepsilon - \lambda\omega - \lambda'\omega - 2\lambda''\tau$ et l'on peut écrire au lieu de l'expression (a)

$$(b) \quad m' \mathfrak{P} \cos (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - \lambda\omega - \lambda'\omega' - 2\lambda''\tau),$$

i', i, λ, λ', λ'' étant des nombres entiers, positifs ou négatifs, et tels que

$$i' - \lambda' - \lambda'' = i + \lambda + \lambda'',$$

ou

$$(c) \qquad i' - i - \lambda - \lambda' - 2\lambda'' = 0 \text{ (a)}.$$

Arrêtons-nous à considérer l'ordre et la composition du

(a) Cette équation de condition résulte de ce que la valeur de R, et, par conséquent, celle de ses différents termes, est indépendante de la position de la droite, à partir de laquelle on compte les longitudes l', l, ω, ω', τ, τ'. En effet, supposons cette origine déplacée d'une quantité que nous représenterons par θ, et qui soit la même pour chaque orbite. La variation subie par l'angle $(i'nt - int + \mathfrak{A})$ sera

$$i'\theta - i\theta - \lambda\theta - \lambda'\theta - 2\lambda''\theta;$$

et si l'on veut qu'après ce déplacement, les diverses combinaisons que l'on peut former avec les angles l, l', ω, ω', τ, τ' restent les mêmes, il faudra, évidemment, que la somme des coefficients qui les multiplient dans l'expression de $(i'nt - int + \mathfrak{A})$ soit nulle, ou que l'on ait

$$i' - i - \lambda - \lambda' - 2\lambda'' = 0.$$

Digitized by Google

coefficient $\mathfrak{P}$. Il résulte des valeurs de r et de v, que le coefficient du sinus ou cosinus de l'angle $l - \omega$ a toujours pour facteur l'excentricité e; que $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} 2(l - \omega)$ a pour facteur e^2, et que généralement

$$\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} m(l - \omega) \text{ a pour facteur } e^m.$$

Si donc, l'on regarde les excentricités et les inclinaisons comme des quantités du premier ordre, leurs carrés et leurs produits comme des quantités du second ordre, et ainsi de suite, on voit que, dans les termes qui dépendent seulement des excentricités, la somme des coefficients des angles ω et ω', pris avec leur signe, indiquera l'ordre le moins élevé du terme que l'on considère dans le développement de R. Et quant aux termes qui sont multipliés par η, comme dans l'expression de χ le coefficient de τ correspond toujours à la puissance de η, on voit, pareillement, que la somme des coefficients des angles ω, ω' et η, pris positivement, indiquera la limite inférieure de l'ordre des termes qui, dans le développement de R, ont pour facteur les puissances de η.

Il est démontré par là que le coefficient $\mathfrak{P}$, lorsqu'on se borne à son premier terme, est de la forme

$$K e^{\lambda} e'^{\lambda'} \eta^{2\lambda''},$$

K étant un coefficient indépendant des excentricités et des inclinaisons, et $\lambda, \lambda', \lambda''$ des nombres pris positivement.

L'ordre de ce terme sera donc $\lambda + \lambda' + 2\lambda''$ ou $i' - i$, en vertu de la relation (c); et il résulte de la forme même donnée aux valeurs de r, v, r' et v', que cet ordre ira en crois-

Digitized by Google

sant de deux unités, à mesure que l'on s'avancera dans la série. Ainsi le premier terme étant de l'ordre $i' - i$, le second sera de l'ordre $i' - i + 2$, le troisième de l'ordre $i' - i + 4$, et ainsi de suite. Si donc $i' - i$ est un nombre pair, tous les termes successifs seront d'ordre pair; ils seront, au contraire, d'ordre impair, si $i' - i$ est lui-même impair.

Nous supposons ici $i' > i$; si l'on avait $i' < i$, le premier terme serait de l'ordre $i - i'$, le second de l'ordre $i - i' + 2$, etc.

En résumé, on voit donc qu'en ne considérant, parmi les termes de R, que ceux qui, dépendant de l'argument $i'n't - int$, sont de l'ordre le moins élevé, c'est-à-dire de l'ordre $i' - i$, R pourra être représenté par une suite de termes de la forme

$$Ke^{\lambda}e^{\lambda'}\eta^{2\lambda''}\cos(i'n't - int - \lambda\omega - \lambda'\omega' - 2\lambda''\tau,$$

les nombres λ, λ', λ'' étant supposés positifs et tels que

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = i' - i.$$

Digitized by Google

CHAPITRE II

Détermination des coefficients qui entrent dans le développement de la fonction perturbatrice

---

I. — Développement en série trigonométrique de la fonction $[a^2 - 2\,aa' \cos(l' - l) + a'^2]^{-\mu}$

La détermination des divers coefficients $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ qui entrent dans le développement de la fonction perturbatrice, et celle de leurs dérivées prises par rapport au demi-grand axe a de l'orbite troublée, peuvent être ramenées, comme on l'a vu dans le chapitre qui précède, au calcul des coefficients du développement de la fonction $[a^2 - 2\,aa' \cos(l' - l) + a^2]^{-\mu}$, en série ordonnée suivant les cosinus de l'arc $(l' - l)$ et de ses multiples. μ dans la théorie des perturbations planétaires est un nombre positif ou négatif, mais essentiellement fractionnaire; et il suffit de le supposer successivement égal à $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ et $\frac{7}{2}$, pour embrasser tous les cas qui peuvent se présenter dans cette théorie.

Posons

$$\frac{a}{a'} = \alpha, \qquad l' - l = \sigma,$$

Digitized by Google

d'où

$$[a^2 - 2aa' \cos(l' - l) + a'^2]^{-\mu} = a'^{-2\mu}(1 - 2\alpha \cos\sigma + \alpha^2)^{-\mu}$$

et soit

$$(1) \qquad (1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\mu} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)}\cos\sigma + \mathfrak{A}^{(2)}\cos 2\sigma + \ldots + \mathfrak{A}^{(i)}\cos i\sigma + \ldots$$

$\mathfrak{A}^{(0)}$, $\mathfrak{A}^{(1)}$... $\mathfrak{A}^{(i)}$ étant des coefficients fonctions de α et de u, qu'il s'agit de déterminer.

En remplaçant, dans le second membre de ce développement, $\cos\sigma$ par sa valeur en exponentielles imaginaires, savoir :

$$\cos\sigma = \frac{1}{2}\left(e^{\sigma\sqrt{-1}} + e^{-\sigma\sqrt{-1}}\right),$$

on aura

$$(1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\mu} = (1 - \alpha e^{\sigma\sqrt{-1}})^{-\mu}(1 - \alpha e^{-\sigma\sqrt{-1}})^{-\mu}.$$

Les facteurs qui figurent au second membre de cette expression peuvent se développer en séries à l'aide de la formule de Newton et donnent

$$\begin{aligned}(1 - \alpha e^{\sigma\sqrt{-1}})^{-\mu} = 1 &+ \frac{\mu}{1}\alpha e^{\sigma\sqrt{-1}} + \frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}\alpha^2 e^{2\sigma\sqrt{-1}} \\ &+ \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}\alpha^2 e^{3\sigma\sqrt{-1}} + \ldots \\ &+ \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+i-1}{1.2.3\ldots i}\alpha^i e^{i\sigma\sqrt{-1}} + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 - \alpha e^{-\sigma\sqrt{-1}})^{-\mu} = 1 &+ \frac{\mu}{1}\alpha e^{-\sigma\sqrt{-1}} + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\alpha^2 e^{-2\sigma\sqrt{-1}} + \\ &+ \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}\alpha^3 e^{-3\sigma\sqrt{-1}} + \ldots \\ &+ \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+i-1)}{1.2.3\ldots i}\alpha^i e^{-i\sigma\sqrt{-1}} + \ldots\end{aligned}$$

Digitized by Google

Multipliant ces deux séries l'une par l'autre, et remplaçant $e^{i\sigma\sqrt{-1}} + e^{i-\sigma\sqrt{-1}}$ par $2\cos i\sigma$, puis comparant le développement qui en résulte à celui (1), on trouve

$$(2)\qquad \mathfrak{A}^{(0)} = 2\left[1 + \left(\frac{\mu}{1}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}\right)^2 \alpha^6 + \ldots\right]$$

$$(3)\qquad \mathfrak{A}^{(1)} = 2\mu\alpha\left[1 + \frac{\mu(\mu+1)}{2}\alpha^2 + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2.3}\alpha^4 + \ldots\right.$$

et généralement

$$(4)\qquad \mathfrak{A}^{(i)} = 2\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+i-1)}{1.2.3\ldots i}\alpha^i\left[1 + \frac{\mu}{1}\frac{\mu+i}{i+1}\alpha^2 + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\frac{(\mu+i)(\mu+i+1)}{(i+1)(i+2)}\alpha^4 + \ldots\right.$$

série très convergente, comme celle (1), toutes les fois que α est moindre que l'unité.

Cas de $\mu = \frac{1}{2}$.

Les formules (2), (3) et (4) donnent, en y faisant $\mu = \frac{1}{2}$ et désignant par $b^{(i)}$ ce que devient $\mathfrak{A}^{(i)}$ dans ce cas,

$$(1)\left\{\begin{aligned} b^{(0)} &= 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2 + 2\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\alpha^4 + \ldots + 2\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\alpha^{2n} + \ldots \\ b^{(1)} &= \alpha + \frac{1.3}{2.4}\alpha^3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)\left(\frac{3.5}{4.6}\right)\alpha^5 + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)\left(\frac{3.5\ldots(2n+1)}{4.6\ldots(2n+2)}\right)\alpha^{2n+1} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned} b^{(i)} = 2\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2i}\Big(&\alpha^i + \frac{1}{2}\cdot\frac{(2i+1)}{2i+2}\,\alpha^{i+2} \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2i+1}{2i+2}\cdot\frac{2i+3}{2i+4}\,\alpha^{i+4} \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2i+1}{2i+2}\cdot\frac{2i+3}{2i+4}\cdot\frac{2i+5}{2i+6}\,\alpha^{i+6} + \ldots\Big) \end{aligned}\right.$$

Revenons à la formule (1). En prenant les logarithmes des deux membres de cette équation, puis les dérivées de ces logarithmes par rapport à σ, on a

$$\frac{-2\mu\alpha\sin\sigma}{1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2} = \frac{-\mathfrak{A}^{(1)}\sin\sigma - 2\mathfrak{A}^{(2)}\sin 2\sigma - \ldots - i\mathfrak{A}^{(i)}\sin i\sigma - \ldots}{\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)}\cos\sigma + \mathfrak{A}^{(2)}\cos 2\sigma + \ldots + \mathfrak{A}^{(i)}\cos i\sigma + \ldots},$$

d où l'on déduit en chassant les dénominateurs, effectuant les multiplications indiquées, et remplaçant les produits de lignes trigonométriques par des sommes (a) :

$$\left.\begin{aligned} &-\mu\alpha\mathfrak{A}^{(0)}\sin\sigma - \mu\alpha\mathfrak{A}^{(1)}\sin 2\sigma - \mu\alpha\mathfrak{A}^{(2)}\sin 3\sigma - \mu\alpha\mathfrak{A}^{(3)}\sin 4\sigma - \ldots \\ &\qquad - \mu\alpha\mathfrak{A}^{(i-2)}\sin(i-1)\sigma \\ &\qquad - \mu\alpha\mathfrak{A}^{(i-1)}\sin i\sigma \\ &\qquad - \mu\alpha\mathfrak{A}^{(i)}\sin(i+1)\sigma \\ &\qquad + \mu\alpha\mathfrak{A}^{(2)}\sin\sigma + \mu\alpha\mathfrak{A}^{(3)}\sin 2\sigma + \ldots \\ &\qquad + \mu\alpha\mathfrak{A}^{(i)}\sin(i-1)\sigma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} = &-(1+\alpha^2)\mathfrak{A}^{(i)}\sin\sigma - (1+\alpha^2)\,2\sin 2\sigma - \ldots \\ &-(1+\alpha^2)(i-1)\mathfrak{A}^{(i-1)}\sin(i-1)\sigma - (1+\alpha^2)\,i\mathfrak{A}^{(i)}\sin i\sigma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &+\alpha\mathfrak{A}^{(i)}\sin 2\sigma + \alpha 2\mathfrak{A}^{(2)}\sin 3\sigma + \alpha 3\mathfrak{A}^{(3)}\sin 4\sigma + \ldots \\ &\qquad + \alpha(i-2)\mathfrak{A}^{(i-2)}\sin(i-1)\sigma \\ &\qquad + \alpha(i-1)\mathfrak{A}^{(i-1)}\sin i\sigma \\ &\qquad + \alpha i\mathfrak{A}^{(i)}\sin(i+1)\sigma \\ &\qquad + \alpha 2\mathfrak{A}^{(2)}\sin\sigma + \alpha 3\mathfrak{A}^{(3)}\sin 2\sigma + \ldots\ldots \\ &\qquad + \alpha i\mathfrak{A}^{(i)}\sin(i-1)\sigma \end{aligned}\right\}$$

(a) Cette transformation s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$2\sin\sigma\cos i\sigma = \sin(i+1)\sigma - \sin(i-1)\sigma,$$
$$2\cos\sigma\sin i\sigma = \sin(i+1)\sigma + \sin(i-1)\sigma.$$

Digitized by Google

En égalant, dans les deux membres de ce développement, les coefficients de sin $(i-1)\sigma$, on doit trouver une relation entre un coefficient quelconque $\mathfrak{A}^{(i)}$ et ceux $\mathfrak{A}^{(i-1)}$, $\mathfrak{A}^{(i-2)}$ qui le précèdent immédiatement dans la série $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$. On a, en effet,

$$\mu\alpha\,\mathfrak{A}^{(i-2)}=(1+\alpha^2)(i-1)\,\mathfrak{A}^{(i-1)}-\alpha(i-2)\,\mathfrak{A}^{(i-2)}-\alpha i\,\mathfrak{A}^{(i)}+\mu\alpha\,\mathfrak{A}^{(i)},$$

relation d'où l'on déduit

$$(5)\qquad \mathfrak{A}^{(i)}=\frac{(i-1)(1+\alpha^2)}{(i-\mu)\alpha}\,\mathfrak{A}^{(i-1)}-\frac{(i+\mu-2)}{(i-\mu)}\,\mathfrak{A}^{(i-2)}.$$

Cette équation (5) est fondamentale dans la théorie qui nous occupe. Elle donne, comme on le voit, le moyen de calculer tous les coefficients $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{A}^{(3)}$, etc., lorsque les deux premiers $\mathfrak{A}^{(0)}$ et $\mathfrak{A}^{(1)}$ ont été déterminés par la relation (4).

Cas de $\mu=\frac{1}{2}$.

Dans le cas de $\mu=\frac{1}{2}$, l'équation (5) devient

$$(\mathrm{III})\qquad b^{(i)}=\frac{2i-2}{2i-1}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)b^{(i-1)}-\frac{2i-3}{2i-1}\,b^{(i-2)}.$$

II. — Relations qui existent entre les termes consécutifs des développements de $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$ et de $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu-1}$.

Nous allons chercher maintenant les relations qui existent entre les divers coefficients du développement en série des fonctions $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$ et $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu-1}$.

Digitized by Google

Soit

$$(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu-1}=\frac{1}{2}\mathfrak{B}^{(0)}+\mathfrak{B}^{(1)}\cos\sigma+\mathfrak{B}^{(2)}\cos 2\sigma+\ldots$$
$$+\mathfrak{B}^{(i)}\cos i\sigma+\ldots$$

et multiplions les deux membres de cette équation par $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)$, puis remplaçons le premier membre qui devient $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$ par sa valeur en série (1). On aura

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)}+\mathfrak{A}^{(1)}\cos\sigma+\mathfrak{A}^{(2)}\cos 2\sigma+\ldots+\mathfrak{A}^{(i)}\cos i\sigma+\cdots$$
$$=(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)\left[\frac{1}{2}\mathfrak{B}^{(0)}+\mathfrak{B}^{(1)}\cos\sigma+\ldots+\mathfrak{B}^{(i)}\cos i\sigma\right].$$

Effectuant les multiplications indiquées, puis transformant en sommes les produits de cosinus (*a*), on trouve que les coefficients de $\cos i\sigma$ sont

dans le 1er membre. . . $\left\{ \mathfrak{A}^{(i)} \right.$

dans le 2e membre . . . $\left\{ \begin{array}{l} +(1+\alpha^2)\mathfrak{B}^{(i)} \\ -\alpha\,\mathfrak{B}^{(i-1)} \\ -\alpha\,\mathfrak{B}^{(i+1)}. \end{array} \right.$

Par l'identification des termes semblables dans les deux membres, on a donc

$$\mathfrak{A}^{(i)}=(1+\alpha^2)\,\mathfrak{B}^{(i)}-\alpha\mathfrak{B}^{(i-1)}-\alpha\mathfrak{B}^{(i+1)}. \tag{6}$$

Si, dans la formule (5), on change μ en $\mu+1$ et i en $i+1$, on a

$$\mathfrak{B}^{(i+1)}=\frac{i(1+\alpha^2)}{(1-\mu)\alpha}\mathfrak{B}^{(i)}-\frac{(i+\mu)}{(i-\mu)}\mathfrak{B}^{(i-1)}, \tag{7}$$

(*a*) Cette transformation repose sur la formule

$$2\cos\sigma\cos i\sigma=\cos(i+1)\sigma+\cos(i-1)\sigma.$$

Digitized by Google

et, par suite,

$$(8)\qquad \mathfrak{A}^{(i)} = \frac{2\mu\alpha}{i-\mu}\mathfrak{B}^{(i-1)} - \frac{\mu(1+\alpha^2)}{i-\mu}\mathfrak{B}^{(i)}.$$

Cette dernière équation, en y remplaçant i par $i+1$, devient

$$\mathfrak{A}^{(i+1)} = \frac{2\mu\alpha}{i-\mu+1}\mathfrak{B}^{(i)} - \frac{\mu(1+\alpha^2)}{i-\mu+1}\mathfrak{B}^{(i+1)},$$

et, en mettant dans celle-ci à la place de $\mathfrak{B}^{(i+1)}$ sa valeur précédente (7), on obtient

$$(9)\quad \mathfrak{A}^{(i+1)} = \frac{\mu(i+\mu)\alpha(1+\alpha^2)}{(i-\mu)(i-\mu+1)\alpha}\mathfrak{B}^{(i-1)} + \frac{\mu[2(i-\mu)\alpha^2 - i(1+\alpha^2)^2]}{(i-\mu)(i-\mu+1)\alpha}\mathfrak{B}^{(i)}.$$

Des valeurs de $\mathfrak{A}^{(i)}$ et $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ qui précèdent, il est aisé de conclure

$$(10)\qquad \mathfrak{B}^{(i)} = \frac{(i+\mu)(1+\alpha^2)}{\mu(1-\alpha^2)^2}\mathfrak{A}^{(i)} - \frac{2\alpha(i-\mu+1)}{\mu(1-\alpha^2)^2}\mathfrak{A}^{(i+1)},$$

formule au moyen de laquelle on pourra déterminer un coefficient quelconque du développement de $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu-1}$, lorsque ceux $\mathfrak{A}^{(i)}$ et $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ de $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$ seront connus.

Si dans la formule (10) on change i en $-i$, et que, dans l'équation résultante, on remplace i par $i+1$, on obtiendra

$$(11)\qquad \mathfrak{B}^{(i+1)} = \frac{2\alpha(1+\mu)}{\mu(1-\alpha^2)^2}\mathfrak{A}^{(i)} - \frac{(i-\mu+1)(1+\alpha^2)}{\mu(1-\alpha^2)^2}\mathfrak{A}^{(i+1)},$$

équation qui, étant combinée avec la précédente par voie d'addition et de soustraction, donne

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(i)}+\mathfrak{B}^{(i+1)}) = \dfrac{(i+\mu)\mathfrak{A}^{(i)} - (i+1-\mu)\mathfrak{A}^{(i+1)}}{2\mu(1-\alpha)^2}, \\ \frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(i)}-\mathfrak{B}^{(i+1)}) = \dfrac{(i+\mu)\mathfrak{A}^{(i)} + (i+1-\mu)\mathfrak{A}^{(i+1)}}{2\mu(1-\alpha)^2}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Cas de $\mu = \frac{1}{2}$ *et de* $\mu = \frac{3}{2}$.

En faisant dans ces formules μ successivement égal à $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, et représentant par $c^{(i)}$ et $e^{(i)}$ les valeurs de $\mathfrak{B}^{(i)}$ correspondantes, on a

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(c^{(i)} + c^{(i+1)}) = \frac{2i+1}{(1-\alpha)^2}\,\frac{1}{2}(b^{(i)} - b^{(i+1)}), \\ \frac{1}{2}(c^{(i)} - c^{(i+1)}) = \frac{2i+1}{(1+\alpha)^2}\,\frac{1}{2}(b^{(i)} + b^{(i+1)}); \end{cases}$$

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{(i)} + e^{(i+1)}) = \frac{1}{6(1-\alpha)^2}[(2i+3)\,c^{(i)} - (2i-1)\,c^{(i+1)}], \\ \frac{1}{2}(e^{(i)} - e^{(i+1)}) = \frac{1}{6(1+\alpha)^2}[(2i+3)\,c^{(i)} + (2i-1)\,c^{(i+1)}]. \end{cases}$$

III. — Calcul des dérivées de $\mathfrak{A}^{(i)}$ par rapport a α.

Passons maintenant au calcul des dérivées de $\mathfrak{A}^{(i)}$ par rapport à α, et, pour plus de simplicité, posons

$$\alpha^n \frac{d^n \mathfrak{A}^{(i)}}{d\alpha^n} = \mathfrak{A}^{(i)}_{[n]}.$$

En différentiant par rapport à α les deux membres de l'équation (1), on en déduira

$$-2\mu\alpha(\alpha - \cos\sigma)(1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\mu-1} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)}_{[1]}$$
$$+ \mathfrak{A}^{(1)}_{[1]}\cos\sigma + \ldots + \mathfrak{A}^{(i)}_{[1]}\cos i\sigma + \ldots$$

et, en remarquant que

$$-\alpha + \cos\sigma = \frac{1 - \alpha^2 - (1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)}{2\alpha},$$

Digitized by Google

on aura

$$\mu(1-\alpha^2)(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu-1}-\mu(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$$
$$=\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)}_{[1]}+\mathfrak{A}^{(1)}_{[2]}\cos\sigma+\ldots+\mathfrak{A}^{(i)}_{[n]}\cos i\sigma+\ldots$$

Remplaçons dans cette expression les quantités irrationnelles qui figurent au premier membre, par leurs développements en séries, puis comparons dans les deux membres les termes affectés des mêmes cosinus; nous trouverons

$$(13)\qquad \mathfrak{A}^{(i)}_{[1]}=\mu(1-\alpha^2)\,\mathfrak{B}^{(i)}-\mu\mathfrak{A}^{(i)},$$

et, en mettant dans celle-ci pour $\mathfrak{B}^{(i)}$ sa valeur (10), nous aurons

$$(14)\qquad \mathfrak{A}^{(i)}_{[1]}=\frac{i+(i+2\mu)\alpha^2}{1-\alpha^2}\mathfrak{A}^{(i)}-\frac{2(i-\mu+1)\alpha}{1-\alpha^2}\mathfrak{A}^{(i+1)}.$$

Cette dernière équation étant différentiée $n-1$ fois par rapport à α, fera connaître la valeur de $\mathfrak{A}^{(i)}_{[n]}$ au moyen des dérivées successives des quantités $\mathfrak{A}^{(i)}$ et $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ supposées connues. Mais, comme les formules auxquelles on parvient de cette manière deviennent de plus en plus compliquées, à mesure que l'on s'élève dans l'ordre de la différentiation (Voyez le livre II de la *Mécanique céleste*), il est préférable, pour obtenir $\mathfrak{A}^{i}_{[n]}$, d'avoir recours au procédé suivant.

On déduit des deux équations (6) et (7) qui précèdent

$$(15)\qquad \mathfrak{A}^{(i)}=\frac{\mu\alpha}{i}\left(\mathfrak{B}^{(i-1)}-\mathfrak{B}^{(i+1)}\right),$$

et cette relation étant différentiée par rapport à α donne

$$\mathfrak{A}^{(i)}_{[1]}=\frac{\alpha\mu}{i}\left\{\left(\mathfrak{B}^{(i-1)}-\mathfrak{B}^{(i+1)}\right)+\left(\mathfrak{B}^{(i-1)}_{[1]}-\mathfrak{B}^{(i+1)}_{[1]}\right)\right\}.$$

Digitized by Google

Mettant dans cette équation à la place de $\mathfrak{A}^{(i)}_{[1]}$ sa valeur (13) et ayant égard à celle (6), on obtient

$$\mathfrak{B}^{(i+1)}_{[1]} = \mathfrak{B}^{(i-1)}_{[1]} - (i+1)\,\mathfrak{B}^{(i+1)} - (i-1)\,\mathfrak{B}^{(i-1)} + 2\alpha i\,\mathfrak{B}^{(i)},$$

relation qui étant indépendante de μ peut s'écrire

$$\mathfrak{A}^{(i+1)}_{[1]} = \mathfrak{A}^{(i-1)}_{[1]} - (i+1)\,\mathfrak{A}^{(i+1)} - (i-1)\,\mathfrak{A}^{(i-1)} + 2\alpha i\,\mathfrak{A}^{(i)},$$

ou, en remplaçant i par $i-1$,

$$(16)\quad \mathfrak{A}^{(i)}_{[1]} = \mathfrak{A}^{(i-2)}_{[1]} - i\mathfrak{A}^{(i)} - (i-2)\,\mathfrak{A}^{(i-2)} + 2\alpha\,(i-1)\,\mathfrak{A}^{(i-1)}.$$

Si l'on différentie maintenant cette relation $n-1$ fois de suite par rapport à α, on obtient

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}^{(i)}_{[2]} &= \mathfrak{A}^{(i-2)}_{[2]} - (i+1)\,\mathfrak{A}^{(i)}_{[1]} - (i-3)\,\mathfrak{A}^{(i-2)}_{[1]} \\
&\qquad + 2(i-1)\,\alpha\,[\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[1]} + \mathfrak{A}^{(i-1)}], \\
\mathfrak{A}^{(i)}_{[3]} &= \mathfrak{A}^{(i-2)}_{[3]} - (i+2)\,\mathfrak{A}^{(i)}_{[2]} - (i-4)\,\mathfrak{A}^{(i-2)}_{[2]} \\
&\qquad + 2\,(i-1)\,\alpha\,[\,\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[2]} + 2\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[1]}], \\
\mathfrak{A}^{(i)}_{[4]} &= \mathfrak{A}^{(i-2)}_{[4]} - (i+3)\,\mathfrak{A}^{(i)}_{[3]} - (i-5)\,\mathfrak{A}^{(i-2)}_{[3]} \\
&\qquad + 2\,(i-1)\,\alpha\,[\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[3]} + 3\,\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[2]}], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

et en général

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}^{(i)}_{[n]} &= \mathfrak{A}^{(i-2)}_{[n]} - (i+\mu-1)\,\mathfrak{A}^{(i)}_{[n-1]} - (i-n-1)\,\mathfrak{A}^{(i-2)}_{[n-1]} \\
&\qquad + 2(i-1)\,\alpha\,[\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[n-1]} + (n-1)\,\mathfrak{A}^{(i-1)}_{[n-2]}].
\end{aligned}\right.$$

Cette formule donne, comme on le voit, les valeurs des dérivées successives du coefficient $\mathfrak{A}^{(i)}$, lorsque celles des deux premiers $\mathfrak{A}^{(0)}$ et $\mathfrak{A}^{(1)}$ sont connues. Ainsi il s'agit de calculer $\mathfrak{A}^{(0)}_{[n]}$ et $\mathfrak{A}^{(1)}_{[n]}$.

Or, si dans l'équation (14) on fait successivement $i = 0$ et

Digitized by Google

$i = 1$, et que, dans le second résultat, on ait égard à la relation (5), on obtiendra

$$(19) \qquad \mathfrak{A}^{(0)}_{[1]} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left[2\mu\alpha^2\mathfrak{A}^{(0)} - 2(1-\mu)\alpha\mathfrak{A}^{(1)}\right],$$

$$(20) \qquad \mathfrak{A}^{(1)}_{[1]} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left[2\mu\alpha\mathfrak{A}^{(0)} + \alpha^2(2\mu-1) - 1\,\mathfrak{A}^{(1)}\right];$$

et par la différentiation de ces formules on en déduira les expressions générales de $\mathfrak{A}^{(0)}_{[n]}$, $\mathfrak{A}^{(1)}_{[n]}$, expressions que l'on pourra ensuite appliquer aux cas de $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{3}{2}$, etc., ce qui fera connaître $b^{(0)}_{[n]}$ et $b^{(1)}_{[n]}$, $c^{(0)}_{[n]}$ et $c^{(1)}_{[n]}$, $e^{(0)}_{[n]}$ et $e^{(1)}_{[n]}$, etc.

Cas de $\mu = \frac{1}{2}$.

Dans les applications numériques, il convient de ne faire ce calcul que pour $b^{(0)}_{[n]}$ et $b^{(1)}_{[n]}$, et d'avoir recours pour obtenir $c^{(0)}_{[n]}$ et $c^{(1)}_{[n]}$, $e^{(0)}_{[n]}$ et $e^{(1)}_{[n]}$, etc., à la différentiation des équations (12). Or, en ne considérant que le seul cas de $\mu = \frac{1}{2}$, on déduit des équations (19) et (20) qui précèdent

$$b^{(0)}_{[1]} = \alpha\, b^{(1)}_{[1]};$$

et par la différentiation $n-1$ fois répétée, on a

$$(\text{VI}) \qquad b^{(0)}_{[n]} = \alpha\left[b^{(1)}_{[n]} + (n-1)\, b^{(1)}_{[n-1]}\right].$$

On a semblablement en différentiant $n-1$ fois de suite l'équation (20), et faisant $\mu = \frac{1}{2}$

$$(\text{VII}) \quad \left\{ \begin{aligned} b^{(1)}_{[n]} = \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^2\big[(3n-2)\big]\, b^{(1)}_{[n-1]} + (3n^2-7n+3)\, b^{(1)}_{[n-2]} \\ + (n-1)^2(n-3)\, b^{(1)}_{[n-3]}\big] - n\, b^{(1)}_{[n-1]}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Maintenant on déduit des formules (12) en les différentiant n fois de suite, et faisant $i = 0$ après la différentiation,

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(0)}_{[n]} + \mathfrak{B}^{(1)}_{[n]}) = \frac{1}{2\mu(1-\alpha)^2}[\mu\mathfrak{A}^{(0)}_{[n]} - (1-\mu)\mathfrak{A}^{(1)}_{[n]}]$$

$$+\frac{2n\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(0)}_{[n-1]} + \mathfrak{B}^{(1)}_{[n-1]}) - n(n-1)\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(0)}_{[n-2]} + \mathfrak{B}^{(1)}_{[n-2]}),$$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(0)}_{[n]} - \mathfrak{B}^{(1)}_{[n]} = \frac{1}{2\mu(1-\alpha)^2}[\mu\mathfrak{A}^{(0)}_{[n]} + (1-\mu)\mathfrak{A}^{(1)}_{[n]}]$$

$$-\frac{2n\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(0)}_{[n-1]} - \mathfrak{B}^{(1)}_{[n-1]}) - n(n-1)\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{2}(\mathfrak{B}^{(0)}_{[n-2]} - \mathfrak{B}^{(1)}_{[n-2]}).$$

Remplaçant dans ces équations μ successivement par $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, on aura pour calculer $c^{(0)}_{[n]}$ et $c^{(1)}_{[n]}$, $e^{(0)}_{[n]}$ et $e^{(1)}_{[n]}$, les formules suivantes :

$$\text{(VIII)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(c^{(0)}_{[n]} + c^{(1)}_{[n]}) = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{1}{2}(b^{(0)}_{[n]} - b^{(1)}_{[n]}) + \frac{2n\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2}(c^{(0)}_{[n-1]} + c^{(1)}_{[n-1]}) \\
&\qquad - n(n-1)\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\frac{1}{2}(c^{(0)}_{[n-2]} + c^{(1)}_{[n-2]}), \\
&\frac{1}{2}(c^{(0)}_{[n]} - c^{(1)}_{[n]}) = \frac{1}{1+\alpha^2}\frac{1}{2}(b^{(0)}_{[n]} + b^{(1)}_{[n]}) - \frac{2n\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{2}(c^{(0)}_{[n-1]} - c^{(1)}_{[n-1]}) \\
&\qquad - n(n-1)\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{2}(c^{(0)}_{[n-2]} - c^{(1)}_{[n-2]});
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(IX)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(e^{(0)}_{[n]} + e^{(1)}_{[n]} = \frac{1}{6(1-\alpha)^2}(3c^{(0)}_{[n]} + c^{(1)}_{[n]}) + \frac{2n\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2}(e^{(0)}_{[n-1]} + e^{(1)}_{[n-1]}) \\
&\qquad - n(n-1)\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)}\frac{1}{2}(e^{(0)}_{[n-2]} + e^{(1)}_{[n-2]}), \\
&\frac{1}{2}(e^{(0)}_{[n]} - e^{(1)}_{[n]}) = \frac{1}{6(1+\alpha)^2}(3c^{(0)}_{[n]} - c^{(1)}_{[n]}) - \frac{2n\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{2}e^{(0)}_{[n-1]} - e^{(1)}_{[n-1]}) \\
&\qquad - n(n-1)\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{2}(e^{(0)}_{[n-2]} - e^{(1)}_{[n-2]}).
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Il convient de donner ici quelques indications sur la marche à suivre dans les applications numériques.

Les quantités $b^{(0)}$ et $b^{(1)}$ qui sont les valeurs de $\mathfrak{A}^{(0)}$ et de $\mathfrak{A}^{(1)}$ pour $\mu = \frac{1}{2}$, ayant été calculées à l'aide des relations (I), on en conclura $b^{(2)}$, $b^{(3)}$... et généralement $b^{(i)}$ au moyen de la relation (III); puis, on aura $c^{(0)}, c^{(1)} \ldots c^{(i)}$ par les équations (IV), et $e^{(0)}$, $e^{(1)} \ldots e^{(i)}$ par les équations (V).

Passant ensuite au calcul des dérivées successives de ces coefficients, on déterminera d'abord $b^{(1)}_{[1]}$, $b^{(1)}_{[2]}$, $b^{(1)}_{[3]} \ldots b^{(1)}_{[n]}$ par l'emploi des formules (VII), et $b^{(0)}_{[1]}\, b^{(0)}_{[2]} \ldots b^{(0)}_{[n]}$ par l'emploi des formules (VI); on pourra alors obtenir $c^{(0)}_{[n]}$ et $c^{(1)}_{[n]}$, $e^{(0)}_{[n]}$ et $e^{(1)}_{[n]}$, en faisant usage des relations (VIII) et (IX).

Quant aux valeurs des autres dérivées $b^{(2)}_{[n]}$, $b^{(3)}_{[n]} \ldots b^{(i)}_{[n]}$; $c^{(2)}_{[n]}$, $c^{(3)}_{[n]} \ldots c^{(i)}_{[n]}$; $e^{(2)}_{[n]}$, $e^{(3)}_{[n]} \ldots e^{(i)}_{[n]}$, on les obtiendra à l'aide des relations générales [(17)—(18)], en y remplaçant successivement $\mathfrak{A}^{(i)}$ par $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$, etc. Cette substitution est permise, puisque ces relations sont indépendantes de l'indice μ.

IV. — RELATIONS QUI LIENT LES COEFFICIENTS $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{B}^{(i)}$, $\mathfrak{C}^{(i)}$... ET LEURS DÉRIVÉES SUCCESSIVES A CEUX $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$... RESPECTIVEMENT.

Il nous reste maintenant à établir les relations qui lient les coefficients $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{B}^{(i)}$... et leurs dérivées successives prises par rapport à a, à ceux $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$... respectivement, et à leurs dérivées.

Digitized by Google

On a d'après ce qu'on a vu au chapitre I, et en faisant $\mathcal{L}' - l = \sigma$

$$(\alpha) \qquad \Theta^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{a'^2}\cos\sigma = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{A}^{(i)}\cos i\sigma,$$

$$(\beta) \qquad \Theta^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a'^3} = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{B}^{(i)}\cos i\sigma,$$

$$(\gamma) \qquad \Theta^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{C}^{(i)}\cos i\sigma.$$

On a d'ailleurs, en posant $\alpha = \frac{a}{a'}$, et désignant par $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$... ce que devient $\mathfrak{A}^{(i)}$ pour $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{5}{2}$..., respectivement

$$(\alpha') \qquad (1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum b^{(i)}\cos i\sigma,$$

$$(\beta') \qquad (1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sum c^{(i)}\cos i\sigma,$$

$$(\gamma') \qquad (1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sum e^{(i)}\cos i\sigma.$$

Comparant entre eux les développements qui sont affectés de la même puissance de μ, c'est-à-dire (α) avec (α'), (β) avec (β'), (γ) avec (γ'), et observant que, en général,

$$\Theta^{-\mu} = a'^{-2\mu}(1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-\mu'},$$

(a) Nous ne nous occupons ici que des dérivées prises par rapport à a, parce qu'à l'aide des formules que nous avons données à la page 174, il est toujours facile de convertir les dérivées relatives à a' en celles relatives à a.

Digitized by Google

on en conclut

$$\mathfrak{A}^{(i)} = \frac{1}{a'} b^{(i)} ; \left[\mathfrak{A}^{(1)} = \frac{1}{a'} (b^{(1)} - \alpha) \text{ pour } i = 1 \right]$$

$$\mathfrak{B}^{(i)} = \frac{1}{a'^3} c^{(i)} ; \left[\mathfrak{B}^{(0)} = \frac{1}{a'^3} (c^{(0)} - 2) \text{ pour } i = 0 \right]$$

$$\mathfrak{C}^{(i)} = \frac{1}{a'^5} e^{(i)}.$$

Par la différentiation n fois répétée, on a donc

$$a^n \frac{d^n \mathfrak{A}^{(i)}}{da^n} = \frac{1}{a'} b^{(i)}_{[n]} ; \left[a \frac{d \mathfrak{A}^{(1)}}{da} = \frac{1}{a'} (b^{\{1\}}_{\{1\}} - \alpha) \text{ pour } i = 1 \right]$$

$$a^n \frac{d^n \mathfrak{B}^{(i)}}{da^n} = \frac{1}{a'^3} c^{(i)}_{[n]}, \quad a^n \frac{d^n \mathfrak{C}^{(i)}}{da^n} = \frac{1}{a'^5} e^{(i)}_{[n]}.$$

Ces formules sont d'un usage fréquent dans les applications numériques ; elles permettent, comme on le voit, de remplacer, dans le développement de R, les quantités $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{B}^{(i)}$... et leurs dérivées, par celles $b^{(i)}$, $c^{(i)}$... $b^{(i)}_{[n]}$, $c^{(i)}_{[n]}$... dont le calcul est beaucoup plus simple. Ces dernières quantités restent en effet les mêmes, soit que l'on considère l'action de m' sur m, ou bien celle réciproque de m sur m'.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Expressions des coefficients des divers termes qui entrent dans le développement de la fonction perturbatrice au moyen d'intégrales définies simples ou doubles.

I. — Représentation des coefficients $\mathfrak{A}^{(i)}$ et $\mathfrak{B}^{(i)}$ a l'aide d'intégrales définies.

Les rélations qui lient entre eux les divers coefficients des fonctions $\Theta^{-\mu}$ et $\Theta^{-\mu-1}$ développées en séries, ont été déterminées dans le chapitre qui précède, en faisant usage de la méthode des coefficients indéterminés. Mais on peut aussi exprimer ces coefficients à l'aide d'intégrales définies simples ou doubles.

Représentons par Θ' la fonction $(1 - 2\alpha \cos \sigma + \alpha^2)$ et posons, conformément à la notation adoptée,

$$\Theta'^{-\mu} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)} \cos \sigma + \ldots + \mathfrak{A}^{(i)} \cos i\sigma + \cdots$$

Si l'on veut exprimer le coefficient $\mathfrak{A}^{(i)}$ par une intégrale définie, il suffira de multiplier les deux membres de ce développement par $\cos i\sigma d\sigma$ et de les intégrer ensuite depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = \pi$. Alors, d'après ce qu'on a vu page 100,

Digitized by Google

tous les termes du second membre, à l'exception de celui qui a $\mathfrak{A}^{(i)}$ pour coefficient s'évanouiront, et, ce dernier terme devenant égal à $\pi\mathfrak{A}^{(i)}$, on aura pour déterminer $\mathfrak{A}^{(i)}$

$$(1) \qquad \mathfrak{A}^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu}}\, d\sigma.$$

Cette formule ramène, comme on le voit, aux quadratures, la détermination générale du coefficient $\mathfrak{A}^{(i)}$. En la considérant conjointement avec celle

$$(2) \qquad \mathfrak{B}^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}}\, d\sigma,$$

qui résulte du développement de $\Theta'^{-\mu-1} = \sum \mathfrak{B}^{(i)} \cos i\sigma$, on peut parvenir très simplement à exprimer les relations qui lient les coefficients de la série $\Theta'^{-\mu}$ à ceux de la suite $\Theta'^{-\mu-1}$.

En effet, soit $\xi = \frac{\sin i\sigma}{\Theta'^{\mu}}$ et différentions cette équation en y faisant varier σ; on aura

$$d\xi = \frac{i\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu}}\, d\sigma - \frac{2\alpha\mu \sin\sigma \sin i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}}\, d\sigma,$$

ou à cause que

$$2\sin\sigma\sin i\sigma = \cos(i+1)\sigma - \cos(i-1)\sigma,$$

$$d\xi = \frac{i\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu}}\, d\sigma + \mu\alpha\left[\frac{\cos(i-1)\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} - \frac{\cos(i+1)\sigma}{\Theta'^{\mu+1}}\right] d\sigma$$

Maintenant, si l'on intègre les deux membres de cette équa-

Digitized by Google

tion depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = \pi$, et qu'on remarque qu'entre ces limites ξ s'évanouit, on aura

$$0 = \int_0^\pi \frac{i \cos i\sigma}{\Theta'^{\mu}} d\sigma + \mu\alpha \int_0^\pi \frac{\cos (i-1)\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} d\sigma$$
$$- \mu\alpha \int_0^\pi \frac{\cos (i+1)\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} d\sigma.$$

En vertu des formules (1) et (2), on aura donc

$$(a) \qquad \mathfrak{A}^{(i)} = \frac{\mu\alpha}{i} [\mathfrak{B}^{(i-1)} - \mathfrak{B}^{(i+1)}].$$

C'est la formule fondamentale (15) de la page 194 du chapitre précédent.

Cette formule détermine les coefficients $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$ etc., au moyen de ceux $\mathfrak{B}^{(0)}$, $\mathfrak{B}^{(1)}$. etc, mais elle ne fait pas connaître $\mathfrak{A}^{(0)}$. Relativement à ce dernier coefficient, remarquons que puisque

$$\Theta'^{-\mu} = \Theta' \Theta'^{-\mu-1},$$

on doit avoir

$$\sum \mathfrak{A}^{(i)} \cos i\sigma = (1 - 2\alpha \cos \sigma + \alpha^2) \sum \mathfrak{B}^{(i)} \cos i\sigma.$$

Si donc l'on effectue dans le second membre de ce développement les multiplications indiquées, et qu'on remplace les produits de cosinus par des sommes, puis que l'on compare, dans les deux membres de l'équation résultante, les termes indépendants de σ, on trouvera comme à la page 191, formule (6),

$$(b) \qquad \mathfrak{A}^{(0)} = (1 + \alpha^2) \mathfrak{B}^{(0)} - \alpha \mathfrak{B}^{(1)}.$$

Digitized by Google

Considérons actuellement les dérivées successives de $\mathfrak{A}^{(i)}$ par rapport à α. En différentiant par rapport à cette quantité la formule (1), on a

$$(c) \qquad \mathfrak{A}_{[1]}^{(i)} = \frac{\mu}{\pi}\int \frac{\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}}(2\cos\sigma - 2\alpha)\, d\sigma$$

$$= \frac{\mu}{\pi}\left[\int \frac{2\cos\sigma\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} - \int \frac{2\alpha\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}}\right] d\sigma.$$

Mais

$$\int \frac{2\cos\sigma\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} d\sigma = \int \frac{\cos(i+1)\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} d\sigma + \int \frac{\cos(i-1)\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} d\sigma.$$

On a donc entre les limites $\sigma = 0$ et $\sigma = \pi$,

$$(d) \qquad \mathfrak{A}_{[1]}^{(i)} = \mu(\mathfrak{B}^{(i+1)} + \mathfrak{B}^{(i-1)} - 2\alpha\,\mathfrak{B}^{(i)}).$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (c) par α et que, dans l'équation résultante, on remplace $2\alpha\cos\sigma - 2\alpha^2$ par sa valeur $1 - \alpha^2 - \Theta'$, et $\Theta'^{\mu+1}$ par $\Theta'\Theta'^{\mu}$, on aura

$$(e) \qquad \mathfrak{A}_{[1]}^{(i)} = \mu(1-\alpha^2)\frac{1}{\pi}\int \frac{\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu+1}} d\sigma - \frac{1}{\pi}\int \frac{\cos i\sigma}{\Theta'^{\mu}} d\sigma.$$

On aura, par suite,

$$(f) \qquad \mathfrak{A}_{[1]}^{(i)} = \mu(1-\alpha^2)\,\mathfrak{B}^{(i)} - \mu\mathfrak{A}^{(i)}.$$

Nous retombons ainsi sur la formule fondamentale (13) du chapitre précédent.

Digitized by Google

II. — Expressions des coefficients $b^{(0)}$ et $b^{(1)}$ a l'aide des transcendantes elliptiques

On peut aussi exprimer par des transcendantes elliptiques les coefficients $b^{(0)}$, $b^{(1)}$ qui sont les valeurs de $\mathfrak{A}^{(0)}$ et de $\mathfrak{A}^{(1)}$ pour $\mu = \frac{1}{2}$.

On a, d'après l'équation (1),

$$b^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{\Theta'^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)}},$$

$$b^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\sigma}{\Theta'^{\frac{1}{2}}}\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\sigma d\sigma}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)}}.$$

Soit φ une nouvelle variable liée à σ par la relation

$$(1) \qquad \sin(\varphi+\sigma) = \alpha\sin\varphi;$$

on aura en faisant pour abréger $\Delta = \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}$,

$$(2) \qquad \cos(\varphi+\sigma) = \Delta,$$

et, de ces deux équations, on en déduira par la différentiation

$$d\sigma = \frac{d\varphi}{\Delta}(\alpha\cos\varphi - \Delta).$$

On a d'ailleurs

$$\cos\sigma = \cos(\sigma+\varphi-\varphi) = \Delta\cos\varphi + \alpha\sin^2\varphi,$$

Digitized by Google

en sorte que

$$\Theta' = 1 - 2\alpha \cos \sigma + \alpha^2 = 1 - 2\alpha \Delta \cos \varphi - 2\alpha^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2$$
$$= 1 - 2\alpha \Delta \cos \varphi + 2 \alpha^2 \cos^2 \varphi - \alpha^2.$$

Mettant cette dernière expression sous la forme

$$1 - 2\alpha \Delta \cos \varphi + \alpha^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \cos^2 \varphi + \Delta^2 - \Delta^2 - \alpha^2,$$

on en conclut

$$\Theta' = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \varphi - \Delta^2 + (\alpha \cos \varphi - \Delta)^2$$
$$= 1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi - \Delta^2 + (\alpha \cos \varphi - \Delta)^2,$$

c'est-à-dire d'après la valeur de Δ

$$(3) \qquad \sqrt{\Theta'} = \alpha \cos \varphi - \Delta.$$

Ainsi on a

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{\Theta'}} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\cos \sigma}{\sqrt{\Theta'}} d\sigma = \frac{d\varphi}{\Delta} \alpha \sin^2 \varphi + \cos \varphi d\varphi = \frac{d\varphi}{\Delta} \frac{(1 - \Delta^2)}{\alpha} + \cos \varphi d\varphi.$$

Comme les limites de la nouvelle variable φ sont les mêmes, d'après l'équation (1), que celles de σ, on peut intégrer les valeurs précédentes depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$; et en remarquant qu'entre ces limites l'intégrale $\int \cos \varphi d\varphi$ est nulle, on obtient pour les expressions de $b^{(0)}$ et de $b^{(1)}$

$$b^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$b^{(1)} = \frac{1}{\pi\alpha} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{\pi\alpha} \int_0^\pi d\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}.$$

Digitized by Google

Désignons maintenant par F (α) et E (α) les transcendantes ou *fonctions elliptiques complètes* de première et de seconde espèce, qui répondent à l'amplitude φ et au module α. On a, d'après les définitions de Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, tome I),

$$2\,F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2\varphi}},$$

$$2\,E(\alpha) = \int_0^{\pi} d\varphi \sqrt{1-\alpha^2 \sin^2\varphi}.$$

On a donc

$$b^{(0)} = \frac{2}{\pi} E(\alpha),$$

$$b^{(1)} = \frac{2}{\pi\alpha} [F(\alpha) - E(\alpha)].$$

Cette méthode de déterminer les deux premiers coefficients du développement de $\Theta^{\frac{1}{2}}$ est surtout avantageuse, lorsque α est très peu différent de l'unité, car, alors, la méthode des séries fournit pour ces quantités des valeurs peu exactes. Pour toutes les valeurs de α, il existe d'ailleurs des tables à l'aide desquelles on peut parvenir très rapidement aux valeurs numériques des transcendantes F (α) et E (α). Ces tables, construites par Legendre, ont été publiées dans le tome II de son *Traité des fonctions elliptiques*.

Digitized by Google

III. — Expressions des coefficients du développement de la fonction R au moyen d'intégrales definies doubles.

Lorsqu'on substitue dans R à la place des variables r, r', v et v' leurs valeurs déduites du mouvement elliptique, cette quantité, comme nous l'avons vu au chapitre I, se change en une fonction périodique des longitudes moyennes l et l' ; et l'on sait qu'une telle fonction peut toujours se développer en une série de sinus et de cosinus des multiples de l et de l'. En désignant par i et i' deux nombres entiers qui peuvent avoir toutes les valeurs positives ou négatives, y compris zéro, et par $M_{ii'}$ et $N_{ii'}$ des coefficients indépendants de l et de l', on aura donc

$$R = \sum M_{ii'} \cos(il - i'l') + \sum N_{ii'} \sin(il - i'l').$$

Par une extension de l'analyse précédente, les coefficients de cette série pourront encore s'exprimer sous forme finie, mais par des intégrales définies doubles. En effet, si l'on multiplie successivement les deux membres de cette équation par $\cos(il - i'l')\, dl\, dl'$ et $\sin(il - i'l')\, dl dl'$, puis qu'on les intègre entre les limites o et 2π, pour chacune des variables

Digitized by Google

il n'est pas difficile de voir qu'on aura (*a*)

$$M_{ii'} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R \cos(il - i'l')\, dl\, dl',$$

$$N_{ii'} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R \sin(il - i'l')\, dl\, dl'.$$

Relativement au terme du développement de R qui répond au cas où l'on a à la fois $i = 0$, $i' = 0$, terme que nous représentons par R_0, il est évidemment égal à

$$R_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R\, dl\, dl'.$$

(*a*) Car j et j' étant des nombres entiers différents de i et de i', on a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(jl - j'l') \cos(il - i'l')\, dl\, dl' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(jl - j'l') \sin(il - i'l')\, dl\, dl' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin j(l - j'l') \cos(il - i'l')\, dl\, dl' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(jl - j'l') \sin(il - i'l')\, dl\, dl' = 0.$$

Dans le cas particulier de $j = i$ et $j' = i'$, la seconde de ces formules subsiste, mais la première et la quatrième deviennent

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(il - i'l')\, dl\, dl' = 2\pi^2,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(il - i'l')\, dl\, dl' = 2\pi^2,$$

pourvu que i et i' ne soient pas tous deux égaux à zéro.

Digitized by Google

Si l'on développe l'expression précédente de R, et qu'on pose

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \cos il \cos i'l' dl dl',$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \sin il \sin i'l' dl dl',$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \sin il \cos i'l' dl dl',$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \cos il \sin i'l' \, dl \, dl',$$

les intégrations étant effectuées par rapport à chacune des deux variables l et l', entre les mêmes limites que ci-dessus, on pourra lui donner la forme

$$R = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cos (il - i'l') + (\mathcal{C} - \mathcal{D}) \sin (il - i'l').$$

On peut encore concevoir la fonction R développée en une suite de termes de la forme

$$R = H_j \cos [i(l' - l) + jl - A_j].$$

Alors en multipliant les deux membres de cette équation par $\cos [(j - i) l - l] dl$, puis intégrant entre les limites $l = 0$ et $l = \pi$, on aura

$$\int_0^{\pi} R \cos[(j-i)l - l] dl = -H_j \frac{2(j-i)}{2(j-i)-1} \sin (il' - A_j).$$

Digitized by Google

Si l'on multiplie ensuite les deux membres de cette dernière équation par $\sin(il' - A_j)\,dl'$, puis qu'on l'intègre entre les mêmes limites que ci-dessus, on obtiendra pour l'expression analytique du coefficient H_j

$$H_j = \frac{1-2(j-i)}{(j-i)\pi} \int_0^{2\pi} \sin(il' - A_j)\,dl' \int_0^{2\pi} R\cos[(j-i)l - l']\,dl.$$

Dans le cas particulier de $j = 0$, on a

$$H_0 = -\frac{(2i+1)}{i\pi} \int_0^{2\pi} \sin(il' - A_0)\,dl' \int_0^{2\pi} R\cos(i+1)\,l\,dl.$$

Digitized by Google

LIVRE IV

PERTURBATIONS DU PREMIER ORDRE PAR RAPPORT AUX MASSSES. — THÉORIE DES INÉGALITÉS SÉCULAIRES ET PÉRIODIQUES

CHAPITRE I

Théorie des inégalités séculaires

I. — Distinction des termes périodiques et séculaires — leur origine

Quelque soit le degré d'approximation auquel on s'arrête dans le développement de la fonction R, on a toujours à considérer deux espèces différentes de termes ; les uns tels que

$$\mathfrak{P} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i'l - il + \mathfrak{A}),$$

où le temps t n'entre qu'introduit par les valeurs des longitudes moyennes $l = nt + \varepsilon$, $l' = n't + \varepsilon'$ sous les signes sinus ou cosinus, et les autres tels que

$$\mathfrak{B}t \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \mathfrak{A},$$

où le temps t y est contenu explicitement. Les premiers reprennent les mêmes valeurs après de courts intervalles de temps, et donnent naissances aux *inégalités périodiques ;* les

Digitized by Google

seconds croissent lentement avec t et produisent les *inégalités séculaires*. Ces deux sortes d'inégalités sont bien périodiques l'une et l'autre, mais les périodes des premières sont incomparablement plus courtes que celles des secondes. Au reste, il existe une distinction bien marquée entre ces deux genres d'inégalités : les inégalités de la première espèce dépendent de la position relative des planètes dans leurs orbites, et se rétablissent toutes les fois que ces positions redeviennent les mêmes ; celles de la seconde espèce, au contraire, sont indépendantes de ces positions et croissent avec une extrême lenteur. Ces dernières affectent particulièrement les éléments du mouvement elliptique, mais elles laissent invariables les grands axes, et par suite aussi les moyens mouvements qui s'en déduisent par la troisième loi de Kepler. Laplace, qui, le premier, a reconnu cette importante propriété de l'invariabilité des grands axes, l'a démontrée en portant l'approximation jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons. Depuis, les géomètres l'ont étendue au carré et aux produits des forces perturbatrices, ainsi qu'à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Il est aisé de démontrer que la partie $m'\frac{1}{\rho}$ de l'expression de R est la seule qui puisse donner naissance aux termes de la seconde espèce, lorsqu'on borne les approximations à la première puissance des forces perturbatrices. En effet si, en ne considérant que les actions mutuelles de deux planètes m et m', on pose

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right),$$

Digitized by Google

et qu'à la place des coordonnées x' y' z' de la planète troublée, on substitue les valeurs de ces variables, déduites des équations du mouvement elliptique [ou des équations (C), page (44), accentuées et dans lesquelles on a fait R = o], on aura

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} + \frac{xd^2x' + yd^2y' + zd^2z'}{dt^2}\right),$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement que la seconde partie de R ne peut contenir aucun terme non périodique ou séculaire. Car les coordonnées x, y, z, ne contenant que des termes périodiques dépendants de nt et de ses multiples, et x' y' z' ne renfermant que des termes semblables dépendants de $n't$, il est impossible que les moyens mouvements nt et $n't$ disparaissent dans les produits, tels que $x\frac{d^2x}{dt^2}$, $y\frac{d^2y}{dt^2}$, $z\frac{d^2z}{dt^2}$, et, par suite, que leur somme renferme des termes autres que ceux périodiques. Les termes de la seconde espèce ne pourront donc provenir que de la partie non périodique de $m'\frac{1}{\rho}$ dans l'expression de R, partie qui est la même pour la planète attirée et pour la planète attirante.

II. — Expression de la partie non périodique de R

Appelons $\mathfrak{u}$ cette partie constante qui est indépendante des anomalies moyennes $n't$ et nt, ou qui ne renferme pas le temps d'une manière explicite. Il résulte de ce qu'on a vu au

Digitized by Google

chapitre I du livre III, que l'on aura, aux quantités près du quatrième ordre (*a*),

$$\mathfrak{A} = \frac{m'}{2} A^{(0)} + \frac{m'}{8} \mathfrak{A} (e^2 + e'^2) + \frac{m'}{2} ee' \mathfrak{A}' \cos(\omega' - \omega)$$
$$- \frac{m'}{8} aa' B^{(1)} \gamma^2,$$

avec

$$\mathfrak{A} = 2a A\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\} + a^2 A\left\{\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{A}' = A^{(1)} - aA\left\{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right\} - \frac{1}{2} a^2 A\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}.$$

Pour développer cette expression de $\mathfrak{A}$ en la forme où elle est habituellement employée dans le calcul des inégalités séculaires, nous rapporterons le mouvement de m à un plan fixe très peu incliné sur le plan de son orbite, et nous nommerons :

φ et φ' les inclinaisons des orbites de m et de m' sur le plan fixe ;

θ et θ' les longitudes de leurs nœuds ascendants sur le même plan ;

γ la tangente de l'inclinaison mutuelle des deux orbites ;

τ la longitude du nœud de la première de ces orbites sur la seconde.

Les tangentes des latitudes de m et de m' qui répondent à

(*a*) Cette partie explicitement indépendante du temps est fournie par l'ensemble des termes non périodiques qui résultent de la supposition $i' = 0$, $i = 0$ dans l'expression générale du développement de R; et comme $i' - i = 0$, on voit que les termes dont nous parlons seront tous d'ordre pair à partir de l'ordre *zéro*. Ces termes seront donc, d'abord ceux qui proviennent de la partie indépendante des excentricités et des inclinaisons, et ensuite ceux des ordres *deux*, *quatre*, *six*, etc., qui ont mêmes arguments que les termes de l'ordre zéro.

Digitized by Google

une même longitude v seront alors

$$\text{tang}\,\varphi \sin(v-\theta), \quad \text{tang}\,\varphi' \sin(v-\theta'),$$

et l'on aura, pour l'expression de la latitude correspondante à la même longitude v comptée sur la seconde orbite,

$$\gamma \sin(v-\tau).$$

Maintenant, si l'on suppose que les inclinaisons φ et φ' soient très petites, ainsi que γ, il est clair que l'on pourra regarder les tangentes des latitudes comme égales à très peu près aux latitudes elles-mêmes, et qu'il sera permis de confondre le cercle de latitude correspondant à la longitude v comptée sur le plan fixe, avec le cercle de latitude correspondant à la même longitude comptée sur l'orbite de m ou de m'. Ainsi la latitude $\gamma \sin(v-\tau)$ sera à très peu près égale à la différence des deux autres latitudes, et l'on aura

$$\gamma \sin(v-\tau) = \text{tang}\,\varphi \sin(v-\theta) - \text{tang}\,\varphi' \sin(v-\theta').$$

En égalant séparément les coefficients de $\sin v$ et de $\cos v$ dans cette équation, et posant pour simplifier

$$\text{tang}\,\varphi \sin\theta = p, \quad \text{tang}\,\varphi' \sin\theta' = p',$$
$$\text{tang}\,\varphi \cos\theta = q, \quad \text{tang}\,\varphi \cos\theta' = q',$$

on aura donc

$$\gamma \sin\tau = p'-p, \quad \gamma \cos\tau = q'-q$$

d'où

$$\gamma^2 = (p'-p)^2 + (q'-q)^2.$$

Ainsi, lorsque φ, φ', γ, et par suite aussi p, q, p', q' sont,

Digitized by Google

comme nous l'avons supposé, de très petites quantités, la fonction $(p'-p)^2+(q'-q)^2$ exprime le carré de l'inclinaison mutuelle γ des orbites de m et de m'.

Il suit de là que l'on peut mettre l'expression précédente de $\mathfrak{U}$ sous la forme

$$\mathfrak{U}=\frac{m'}{2}A^{(0)}+\frac{m'}{8}\mathfrak{N}(e^2+e'^2)$$
$$+\frac{m'}{2}ee'\mathfrak{N}'\cos(\omega'-\omega)-\frac{m'}{8}aa'B^{(1)}[(p'-p)^2+(q'-q)^2].$$

Les fonctions $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ qui entrent dans cette valeur de $\mathfrak{U}$, prennent une forme remarquable, lorsqu'on les exprime au moyen des quantités que nous avons désignées par $b^{(0)}$ et $b^{(1)}$.

On a, d'après ce qu'on a vu au paragraphe IV du chapitre II, page 200,

$$A^{\{0\}}_{\{1\}}=\frac{1}{a'^2}b^{\{0\}}_{\{1\}},\qquad A^{\{0\}}_{\{2\}}=\frac{1}{a'^3}b^{\{0\}}_{\{2\}},$$
$$A^{(1)}=\frac{1}{a'}b^{(1)}-\frac{\alpha}{a'},\qquad A^{\{1\}}_{\{1\}}=\frac{1}{a'^2}b^{\{1\}}_{\{1\}}-\frac{1}{a'^2},$$
$$A^{\{1\}}_{\{2\}}=\frac{1}{a'^3}b^{\{1\}}_{\{2\}};$$

on a par suite

$$(a)\begin{cases}\mathfrak{N}=\dfrac{1}{a'}(2\alpha\, b^{\{0\}}_{\{1\}}+\alpha^2 b^{\{0\}}_{\{2\}}),\\[2ex] \mathfrak{N}'=\dfrac{1}{a'}\left(b^{(1)}-\alpha b^{\{1\}}_{\{1\}}-\dfrac{1}{2}\alpha^2 b^{\{1\}}_{\{2\}}\right).\end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$b^{\{0\}}_{\{1\}}=\frac{1}{1-\alpha^2}(\alpha b^{(0)}-b^{(1)}),\quad b^{\{0\}}_{\{2\}}=\frac{1}{\alpha(1-\alpha^2)}\{(3\alpha^2-1)b^{\{0\}}_{\{1\}}+\alpha b^{(0)}\}.$$

Digitized by Google

D'autre part, on déduit de la formule (10) du chapitre II, en y faisant $i=0$ et $\mu=-\frac{1}{2}$, et désignant par $\mathfrak{b}^{(i)}$ ce que devient $b^{(i)}$ dans ce cas particulier

$$b^{(0)}=\frac{1}{(1-\alpha^2)^2}\{(1+\alpha^2)\,\mathfrak{b}^{(0)}+6\alpha\,\mathfrak{b}^{(1)}\};$$

et de là il est aisé de conclure

$$b^{(1)}=\frac{1}{(1-\alpha^2)^2}\{2\alpha\,\mathfrak{b}^{(0)}+3(1+\alpha^2)\,\mathfrak{b}^{(1)}\}.$$

Substituant ces valeurs dans celles (a), on a donc

$$a\mathfrak{A}=-\frac{3\alpha^2\,\mathfrak{b}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

$$a'\mathfrak{A}'=\frac{1}{(1-\alpha^2)^2}\left\{3\alpha(1+\alpha^2)\,\mathfrak{b}^{(1)}+\frac{1}{2}\alpha\,\mathfrak{b}^{(0)}\right\}.$$

Quant aux quantités $\mathfrak{b}^{(0)}$, $\mathfrak{b}^{(1)}$ dont les développements en séries sont plus convergents que ceux de $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, on a pour les déterminer

$$\mathfrak{b}^{(0)}=2\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2\alpha^4+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2\alpha^6+\ldots,\right.$$

$$\mathfrak{b}^{(1)}=-\alpha\left\{1-\frac{1.1}{2.4}\alpha^2-\frac{1.1.1.3}{4.2.4.6}\alpha^4-\frac{1.3}{4.6}\cdots\frac{1.1.3.5}{2.4\;6.8}\alpha^6-\ldots\right.$$

Si l'on désigne maintenant par $(a,a')_0$, $(a,a')_1$, $(a,a')_2\ldots$ ce que deviennent les coefficients $\mathfrak{A}^{(0)}$, $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}\ldots$ du chap. II, lorsqu'on y fait $\mu=-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si l'on pose

$$(a^2-2aa'\cos\sigma+a'^2)^{\frac{1}{2}}=\sum(a,a')_n\cos i\sigma,$$

Digitized by Google

on aura

$$(a,a')_0 = \frac{1}{2} a' \mathfrak{b}^{(0)}, \qquad (a,a')_1 = a' \mathfrak{b}^{(1)},$$

et par suite

$$\mathfrak{u} = -\frac{3\,aa'\,(aa')_1}{(a'^2 - a^2)^2},$$

$$\mathfrak{u}' = \frac{1}{(a'^2 - a^2)^2} \left\{ 3\,[aa'\,(a,a')_0 + (a^2 + a'^2)\,(a,a')_1] \right\}.$$

C'est sous cette forme que les fonctions $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ sont ordinairement employées dans la théorie des inégalités séculaires.

On peut évidemment exprimer de la même manière que $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$, la fonction $B^{(1)}$ qui multiplie, dans le développement de $\mathfrak{u}$, l'inclinaison mutuelle des orbites.

On a, en effet, par la seconde des formules de la page 200

$$a^2 a' B^{(1)} = \alpha^2 c^{(1)},$$

et comme

$$c^{(1)} = -\frac{3\,\mathfrak{b}^{(1)}}{(1 - \alpha^2)^2},$$

il en résulte

$$a^2 a' B^{(1)} = -\frac{3\,\alpha^2\,\mathfrak{b}^{(1)}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

ainsi $aa'B^{(1)}$ est égal à $\mathfrak{u}$; on a donc

$$B^{(1)} = -\frac{3\,(a,a')_1}{(a'^2 - a^2)^2}.$$

Digitized by Google

III. — Variations séculaires des éléments des orbites planétaires

Les variations séculaires des éléments de l'orbite elliptique sont données par les formules (A) et (C), pages 141 et 147, dans lesquelles on doit remplacer R par la partie non périodique de son développement, c'est-à-dire par

$$(1)\quad \mathfrak{U} = \frac{m'}{2} A^{(0)} + \frac{m'}{8} \mathfrak{n} \left\{ (e^2 + e'^2) - [p' - p)^2 + (q' - q)^2] \right\} + \frac{m'}{2} ee' \mathfrak{n}' \cos(\omega' - \omega).$$

Or, si l'on remarque que la différentielle de cette fonction prise par rapport à nt est nulle, puisque cette fonction ne renferme pas cet angle, et que de plus

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\varepsilon} = \frac{d\mathfrak{U}}{ndt},$$

on voit que l'on aura pour exprimer les variations dont nous parlons

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & da = 0, \\ & \frac{de}{dt} = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{d\mathfrak{U}}{de}, \\ & \frac{dp}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\mathfrak{U}}{dq}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\mathfrak{U}}{dp}, \\ & \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{d\mathfrak{U}}{de} - 2a^2 n \frac{d\mathfrak{U}}{da}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

La première de ces équations montre déjà que les grands axes des orbites et, par suite, aussi les moyens mouvements, sont invariables lorsqu'on fait abstraction des inégalités périodiques. Mais comme les développements qui précèdent sont bornés à la première puissance des masses et aux termes du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, nous reviendrons bientôt sur ce principe pour l'étendre au carré et aux produits des forces perturbatrices, ainsi qu'à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Occupons-nous d'abord de la détermination de de, $d\omega$, dp et dq. On a en différentiant l'expression précédente de $\mathfrak{U}$ par rapport à ω, e, p et q

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\omega} = \frac{m'}{2} ee'\mathfrak{U}' \sin(\omega' - \omega),$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{de} = \frac{m'}{4} e\mathfrak{U} + \frac{m'}{2} e'\mathfrak{U}' \cos(\omega' - \omega).$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dp} = -\frac{m'}{4} \mathfrak{U}(p - p'),$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dq} = -\frac{m'}{4} \mathfrak{U}(q - q').$$

On a, par suite, en négligeant le carré de l'excentricité, ce qui réduit $\sqrt{1-e^2}$ à 1,

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -m'na\frac{1}{2}\mathfrak{U}'e' \sin(\omega' - \omega), \\ \frac{d\omega}{dt} &= m'na\left\{\frac{1}{4}\mathfrak{U} + \frac{1}{2}\mathfrak{U}'\frac{e'}{e}\cos(\omega' - \omega)\right\}, \\ \frac{dp}{dt} &= -m'na\frac{1}{4}\mathfrak{U}(q - q'), \\ \frac{dq}{dt} &= m'na\frac{1}{4}\mathfrak{U}(p - p'). \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Les deux dernières formules peuvent être exprimées en fonction de θ et φ, quantités qu'elles ne renferment qu'implicitement sous la forme précédente. En effet, on a

$$p = \operatorname{tang}\varphi \sin\theta, \qquad q = \operatorname{tang}\varphi \cos\theta,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2+q^2}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{p}{q},$$

équations qui étant différentiées donnent, en s'arrêtant à la première puissance de φ.

$$d\varphi = \sin\theta dp + \cos\theta dq,$$

$$d\theta = \frac{\cos\theta dp - \sin\theta dq}{\operatorname{tang}\varphi}.$$

Mettant dans ces formules à la place de dp et de dq leurs valeurs ci-dessus; remplaçant ensuite dans les équations résultantes p et q par les relations (a) et p', q' par les relations analogues, on obtient

$$\frac{d\varphi}{dt} = m'na\frac{1}{4}\mathfrak{U}\operatorname{tang}\varphi' \sin(\theta - \theta'),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -m'na\left\{\frac{1}{4}\mathfrak{U} - \frac{1}{4}\mathfrak{U}\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\operatorname{tang}\varphi}\cos(\theta - \theta)\right\}.$$

Ainsi, nous avons pour déterminer les variations séculaires des éléments e, ω, φ et θ de l'orbite de m, causées par l'action du corps m'

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= -m'na\frac{1}{2}\mathfrak{U}'e\sin(\omega' - \omega),\\
\frac{d\omega}{dt} &= m'na\left\{\frac{1}{4}\mathfrak{U} + \frac{1}{2}\mathfrak{U}'\frac{e'}{e}\cos(\omega' - \omega)\right\},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= m'an\frac{1}{4}\mathfrak{U}\operatorname{tang}\varphi'\sin(\theta - \theta'),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -m'na\left\{\frac{1}{4}\mathfrak{U} + \frac{1}{4}\mathfrak{U}\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\operatorname{tang}\varphi}\cos(\theta - \theta')\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

L'action des autres planètes m'', m'''... ne ferait qu'introduire des termes semblables aux précédents, qui s'ajouteraient avec eux, et que l'on obtiendrait en remplaçant successivement a' et m' par a'' et m''; a''' et m''' etc. En changeant ensuite dans les équations résultantes ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m', m'', m''', et réciproquement, on aurait les valeurs de $\frac{de'}{dt}, \frac{de''}{dt} \cdots \frac{d\theta'}{dt}, \frac{d\theta''}{dt} \cdots$ qui se rapportent à m', m'' etc.

Il nous reste à obtenir la variation séculaire de la longitude de l'époque ou la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$. Or, si l'on pose

$$V = \frac{1}{(a'^2 - a^2)^2} \{ 2a^2 (a, a') + 3aa' (a, a')_1 \},$$

$$V_1 = -\frac{1}{8(a'^2 - a^2)^3} \{ 12 a^2 a'^2 (a, a') - 3(3a^3 a' - aa'^3)(a, a')_1 \},$$

$$W = -\frac{1}{4(a'^2 - a^2)^3} \{ 3(a^2 - 5a'^2) aa' (a, a') + 3(a^4 + 6a^2 a'^2 - 5a'^4)(a, a')_1 \},$$

$$W_1 = \frac{1}{4(a'^2 - a^2)^3} \{ 6a^2 a'^2 (a, a') - 3a^3 a' (a, a')_1 \},$$

et qu'on néglige les puissances de e supérieures à la seconde (a), ce qui réduit la dernière des formules (2) à

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} ane \frac{d\mathfrak{U}}{de} - 2a^2 n \frac{d\mathfrak{U}}{da},$$

il n'est pas difficile de voir que l'on aura

$$\text{(B)} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = m'an \{ V + V_1 e^2 + W ee' \cos(\omega' - \omega) + W_1 [(p' - p)^2 + (q' - q^2) - e'^2] \}.$$

Digitized by Google

Cette formule convient au cas de m troublé par m'. L'action des autres planètes m'', m'''... ne ferait qu'ajouter à son second membre des termes semblables, que l'on déduirait des premiers en accentuant convenablement les lettres qui y entrent. On obtiendrait ensuite $\frac{d\varepsilon'}{dt}$, $\frac{d\varepsilon''}{dt}$, etc. en changeant successivement, dans l'équation résultante, ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m', m''..., et réciproquement.

IV. — Invariabilité de la fonction $\mathfrak{U}$

La propriété importante qui caractérise la fonction $\mathfrak{U}$, est que cette fonction doit demeurer constante, quelques variations que viennent à subir, dans la suite des siècles, les quantités e, ω, φ et θ dont elle dépend.

Reprenons l'expression (1) du paragraphe III, dans laquelle nous avons déjà introduit au lieu des variables φ et θ, d'autres

(a) Si dans l'expression ci-dessus de $\frac{d\varepsilon}{dt}$ l'on n'avait eu égard qu'aux termes du premier ordre par rapport à e et à γ, comme nous l'avons fait dans le calcul des autres éléments, on n'aurait obtenu par l'intégration qu'un terme proportionnel au temps, du premier ordre par rapport à m', et qui, s'ajoutant à nt dans l'expression de la longitude moyenne $nt + \varepsilon$, n'aurait fait que modifier cet élément nt. Comme les termes de cette espèce sont toujours très petits, insensibles même, on doit en conclure que la variation séculaire de la longitude ε de l'époque ne peut provenir que des termes dépendants des secondes puissances des excentricités et des inclinaisons, et c'est pour cette raison que nous les avons conservés dans la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Digitized by Google

variables p et q liées aux premières par les relations

$$p = \tang \varphi \sin \theta, \qquad q = \tang \varphi \cos \theta,$$

et posons en outre

$$h = e \sin \omega, \qquad l = e \cos \omega.$$

Si l'on remarque que

$$e^2 + e'^2 = h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2,$$
$$ee' \cos(\omega' - \omega) = hh' + ll',$$

on aura

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2}[A^{(0)} + \mathfrak{H} + \mathfrak{Q}],$$

avec

$$\mathfrak{H} = \left[\frac{1}{4}\sum mm'(h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) + \sum mm'(hh' + ll')\right]\mathfrak{U},$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{4}\sum mm'[(p - p')^2 + (q - q')^2]\mathfrak{U}'.$$

Le signe $\sum$ s'étend dans ces formules à toutes les planètes m, m', m''.., prises deux à deux, et $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ sont des fonctions des demi-grands axes a, a'... dont nous avons donné les expressions au paragraphe qui précède.

Ainsi la fonction $\mathfrak{U}$ se décompose en deux fonctions distinctes et symétriques des éléments $h, l, p, q, h', l', p', q'$, etc., et chacune de ces fonctions ne contient pas le temps d'une manière explicite. Or, si l'on substitue la valeur de la première fonction $\mathfrak{H}$ à la place de $\mathfrak{U}$ dans les équations (2) du paragraphe I, et qu'on néglige les termes d'un ordre supérieur au

Digitized by Google

premier par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, on aura, en mettant $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ au lieu de n, $\frac{1}{a'^{\frac{3}{2}}}$ au lieu de n' etc.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{m\sqrt{a}}\frac{d\mathfrak{H}}{dl}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{m\sqrt{a}}\frac{d\mathfrak{H}}{dh},$$

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{1}{m'\sqrt{a'}}\frac{d\mathfrak{H}}{dl'}, \qquad \frac{dl'}{dt} = -\frac{1}{m'\sqrt{a'}}\frac{d\mathfrak{H}}{dh'},$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aurait des expressions semblables pour déterminer p, q, p' q' etc., mais dans lesquelles la fonction $\mathfrak{H}$ serait remplacée par celle $\mathfrak{Q}$ et les variables h, l,... par celles p, q etc.

De toutes ces équations prises deux à deux, on tire

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dh}dh + \frac{d\mathfrak{H}}{dl}dl = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{H}}{dh'}dh' + \frac{d\mathfrak{H}}{dl'}dl' = 0 \quad \text{etc.}$$

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{dp}dp + \frac{d\mathfrak{Q}}{dq}dq = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{Q}}{dp'}dp' + \frac{d\mathfrak{Q}}{dq'}dq' = 0 \quad \text{etc.}$$

d'où

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dh}dh + \frac{d\mathfrak{H}}{dl}dl + \frac{d\mathfrak{H}}{dh'}dh' + \ldots = 0$$

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{dp}dp + \frac{d\mathfrak{Q}}{dq}dq + \frac{d\mathfrak{Q}}{dp'}dp' + \ldots = 0;$$

et comme $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{Q}$ sont des fonctions des éléments a, h, l... a, p, q... indépendantes de t, et que, d'ailleurs, les grands axes a, a'..., ne sont assujettis à aucune inégalité séculaire, on en conclut $d(\mathfrak{H} + \mathfrak{Q}) = 0$ et par suite $\mathfrak{H} + \mathfrak{Q} =$ *constante*. Ainsi la fonction $\mathfrak{U}$ conserve une valeur constante.

Cette propriété de la fonction $\mathfrak{U}$ subsiste encore pour des puissances de e et de φ supérieures à la seconde; car si l'on

Digitized by Google

forme la différentielle totale de $\mathfrak{U}$ par rapport aux éléments e, ω, φ et θ, savoir :

$$d\mathfrak{U} = \frac{d\mathfrak{U}}{de}\,de + \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega}\,d\omega + \frac{d\mathfrak{U}}{d\varphi}\,d\varphi + \frac{d\mathfrak{U}}{d\theta}\,d\theta,$$

et que, dans cette différentielle, on substitue pour $de, d\omega, d\varphi$ et $d\theta$ leurs valeurs déduites des équations (A) de la page 141, on trouvera un résultat identiquement nul. D'où il suit que l'invariabilité de la fonction $\mathfrak{U}$ subsiste encore, lorsqu'on a égard à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons, et qu'ainsi la propriété dont jouit cette fonction, relativement aux variations séculaires, est générale.

V. — Valeurs de de, $d\omega$, $d\varphi$, $d\theta$... ordonnées suivant les puissances du temps. — Variations annuelles

Les formules (A) et celles analogues relatives aux différents corps du système, ne donnent les variations finies de e, ω, φ, θ... que pour un temps infiniment court; car ce n'est que pour cet intervalle de temps qu'on peut regarder comme rigoureusement constants, les éléments e, e'... ω, ω'... φ, φ'... θ, θ'... qui y entrent. On peut cependant, avec une approximation suffisante pour un très long espace de temps, intégrer les équations (A), en donnant à e, e'... ω, ω'... les valeurs qui se rapportent à l'époque choisie pour origine, ce qui revient à multiplier par t les équations dont il s'agit. Cette approximation peut d'ailleurs être poussée aussi loin qu'on le désire, en réduisant en séries ordonnées par rapport à t, les

Digitized by Google

valeurs de $\frac{de}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \cdots$ Ainsi, t désignant le nombre d'années écoulées depuis l'époque donnée, on aura pour exprimer les variations de e, ω...

$$t\frac{de}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^3e}{dt^3} + \cdots$$

$$t\frac{d\omega}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^3\omega}{dt^3} + \cdots$$

etc. . . . . .

séries qui conviendront également aux années qui précèdent l'époque choisie pour origine, si l'on a soin d'y faire t négatif.

Pour $t = 100$, les seconds membres ne donnent que des centièmes de seconde et les suivants sont nuls. On peut donc, relativement aux planètes, s'en tenir aux deux premiers termes de la série précédente pour déterminer, pendant la durée d'un grand nombre de siècles, les variations séculaires des éléments planétaires. Quant aux premiers termes $t\frac{de}{dt}, t\frac{d\omega}{dt} \cdots$ qui ne donnent que quelques secondes, on peut s'en servir pour calculer, avec une exactitude suffisante, pendant la durée d'un ou de deux siècles, les inégalités séculaires des mêmes éléments.

Les *variations annuelles*, répondent au cas de $t = 1$, et sont représentées, dans l'expression générale du développement de R, par le terme

$$\mathfrak{S} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mathfrak{A}.$$

Comme ces variations sont toujours très petites, on peut

Digitized by Google

les supposer égales au rapport des différentielles de, dt ; $d\omega$, dt, etc., c'est-à-dire que ces variations sont représentées par les termes

$$\frac{de}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt}, \text{ etc.}$$

V. — Relations qui existent entre les fonctions $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ et leurs analogues

Les quantités $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ et leurs analogues sont liées entre elles par des équations de condition qu'il est très important de connaître. Ces équations peuvent servir, en effet, à les déterminer l'une par l'autre ou à en vérifier les valeurs, quand on les a calculées séparément, ce qui est un avantage bien précieux dans les applications numériques.

Posons pour simplifier

$$\mathfrak{V}^{(0.1)} = m'na\,\frac{1}{4}\,\mathfrak{N} = -\frac{3\,m'na^2a'\,(a,a')_1}{4\,(a'^2-a^2)^2},$$

et représentons par $\mathfrak{V}^{(1.0)}$ ce que devient $\mathfrak{V}^{(0.1)}$, lorsqu'on y change m', n, a en m, n', a', et réciproquement. On aura

$$\mathfrak{V}^{(1.0)} = -\frac{3\,mn'a'^2a\,(a',a)_1}{4\,(a'^2-a^2)^2},$$

et par la comparaison de ces deux valeurs, on en déduira en remarquant que $(a, a')_1 = (a', a)_1$,

$$\mathfrak{V}^{(0.1)}\,mn'a' = \mathfrak{V}^{(1.0)}\,m'na.$$

Digitized by Google

Mais

$$a^3 n^2 = 1 , \quad a'^3 n'^2 = 1;$$

on a donc

$$\mathfrak{V}^{(0.1)} m\sqrt{a} = \mathfrak{V}^{(1.0)} m'\sqrt{a'}.$$

On aurait semblablement

$$\mathfrak{V}^{(0.2)} m\sqrt{a} = \mathfrak{V}^{(2.0)} m''\sqrt{a''},$$
$$\mathfrak{V}^{(1.2)} m'\sqrt{a'} = \mathfrak{V}^{(2.1)} m''\sqrt{a''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en convenant de représenter par $\mathfrak{V}^{(0.2)}$, $\mathfrak{V}^{(0.3)}$... ce que devient $\mathfrak{V}^{(0.1)}$, lorsqu'on y change successivement a' et m' en a'' et m''; a''' et m'''; et par $\mathfrak{V}^{(1.0)}, \mathfrak{V}^{(1.2)}, \mathfrak{V}^{(1.3)}\ldots, \mathfrak{V}^{(2.1)}, \mathfrak{V}^{(2.0)}, \mathfrak{V}^{(2.3)}\ldots$ ce que deviennent $\mathfrak{V}^{(0.1)}, \mathfrak{V}^{(0.2)}, \mathfrak{V}^{(0.3)}\ldots$, lorsqu'on y change successivement ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à $m', m'', m'''\ldots$, et réciproquement.

Relativement aux fonctions $\mathfrak{U}'$, on aurait pareillement, en posant

$$\mathfrak{V}'^{(0.1)} = -m' n a \frac{1}{2} \mathfrak{U}',$$

et employant les mêmes notations que ci-dessus,

$$\mathfrak{V}'^{(0.1)} m\sqrt{a} = \mathfrak{V}'^{(1.0)} m'\sqrt{a'},$$
$$\mathfrak{V}'^{(0.2)} m\sqrt{a} = \mathfrak{V}'^{(2.0)} m''\sqrt{a''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De là et de ce qui précède, on conclut

$$\mathfrak{V}^{(0.1)} \mathfrak{V}'^{(1.0)} = \mathfrak{V}^{(1.0)} \mathfrak{V}'^{(0.1)},$$
$$\mathfrak{V}^{(0.2)} \mathfrak{V}'^{(2.0)} = \mathfrak{V}^{(2.0)} \mathfrak{V}'^{(0.2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

VI. — Variations des inclinaisons et des nœuds des orbites planétaires par rapport a l'orbite mobile de la terre

Au lieu de rapporter la position des orbites planétaires à un plan fixe, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les astronomes ont coutume de rapporter cette position au plan même de l'orbite de la Terre; c'est en effet du plan de cette orbite que nous observons les mouvements célestes. Afin de pouvoir comparer la théorie aux observations, il est donc nécessaire de connaître les variations séculaires des nœuds et des inclinaisons relativement à l'écliptique.

Or, si l'on suppose que m représente la Terre, et qu'on désigne par Φ et Θ l'inclinaison et la longitude du nœud de l'orbite de m' sur l'orbite de m ou de l'écliptique, il résulte de ce qui a été dit au § II, que l'on aura

$$\tang \Phi = \sqrt{(p'-p)^2 + (q'-q)^2},$$

$$\tang \Theta = \frac{p'-p}{q'-q}.$$

Si l'on prend pour plan fixe celui de l'écliptique à une époque donnée, il est clair que pour cette époque $p = 0$, $q = 0$; a valeur de $\tang \Theta$ se réduira à $\frac{p'}{q'}$ ou à $\tang \theta'$, et par la différentiation des valeurs précédentes, on en déduira, en remarquant que les différentielles dp et dq ne sont pas nulles,

$$d\Phi = (dp' - dp) \sin \theta' + (dq' - dq) \cos \theta',$$

$$d\Theta = \frac{1}{\tang \theta'} [(dp' - dp) \cos \theta' - (dq' - dq) \sin \theta'].$$

Digitized by Google

Mais en employant la notation des fonctions $\mho$, on conclut des deux dernières formules (a) de la page 221.

$$\frac{dp}{dt} = -\{\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \ldots\}\, q + \mho^{(0.1)} q' + \mho^{(0.2)} q'' + \ldots$$

$$\frac{dp'}{dt} = -\{\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \ldots\}\, q' + \mho^{(1.0)} q' + \mho^{(1.2)} q'' + \ldots$$

$$\frac{dq}{dt} = \{\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \ldots\}\, p - \mho^{(0.1)} p' - \mho^{(0.2)} p'' - \ldots$$

$$\frac{dq'}{dt} = \{\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \ldots\}\, p' - \mho^{(1.0)} p - \mho^{(1.2)} p'' - \ldots;$$

on a donc

$$\frac{d\Phi}{dt} = [\mho^{(1.2)} - \mho^{(0.2)}] \operatorname{tang} \varphi'' \sin(\theta' - \theta'')$$
$$+ [\mho^{(1.3)} - \mho^{(0.3)}] \operatorname{tang} \varphi''' \sin(\theta' - \theta''') + \ldots$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -[\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \mho^{(1.3)} + \ldots] - \mho^{(0.1)}$$
$$+ [\mho^{(1.2)} - \mho^{(0.2)}] \frac{\operatorname{tang} \varphi''}{\operatorname{tang} \varphi'} \cos(\theta' - \theta'')$$
$$+ [\mho^{(1.3)} - \mho^{(0.3)}] \frac{\operatorname{tang} \varphi'''}{\operatorname{tang} \varphi'} \cos(\theta' - \theta''') + \ldots$$

On trouverait des formules semblables pour déterminer les variations du nœud et des inclinaisons de m'', m'''... par rapport à l'orbite de m, et ces formules seraient toutes exactes aux quantités près du troisième ordre.

Digitized by Google

CHAPITRE II

Intégration des équations différentielles qui déterminent les variations séculaires des éléments des orbites planétaires

---

I. — Réduction des équations différentielles a la forme linéaire

Les formules générales que nous avons données dans le chapitre précédent pour déterminer les variations séculaires des éléments de l'orbite elliptique, peuvent s'étendre, comme nous l'avons dit, à plusieurs siècles après ou avant l'époque choisie pour origine, et suffisent ainsi à tous les besoins de l'astronomie. Toutefois, comme ces variations sont susceptibles de croître indéfiniment avec le temps, on peut se demander si, à la longue, elles ne finiront pas par devenir considérables et par changer entièrement la nature et la position des orbites des différents corps qui composent notre système. Cette question qui intéresse au plus haut degré nos connaissances sur la stabilité du système planétaire, ne peut être résolue que par l'intégration des équations différentielles qui déterminent les inégalités séculaires des éléments elliptiques; car c'est en examinant avec soin la forme de leurs inté-

Digitized by Google

grales rigoureuses, que l'on peut parvenir à découvrir la loi des variations qu'elles renferment, c'est-à-dire leurs limites extrêmes et la période de leurs accroissements.

Avant d'entrer dans le détail de cette intégration, nous commencerons par ramener le système des équations (A) à la forme d'équations différentielles linéaires du premier ordre que l'on sait intégrer.

On y parvient à l'égard des expressions qui donnent les variations séculaires des inclinaisons et des nœuds, en posant, comme on l'a vu page 216,

$$(a)\qquad \begin{array}{ll} p = \operatorname{tang}\varphi \sin\theta, & q = \operatorname{tang}\varphi \cos\theta, \\ p' = \operatorname{tang}\varphi' \sin\theta', & q' = \operatorname{tang}\varphi' \cos\theta'; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

car on obtient alors

$$(I)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} = -[\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \dots]q + \mho^{(0.1)}q' + \mho^{(0.2)}q'' + \dots, \\ \dfrac{dq}{dt} = [\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \dots]p - \mho^{(0.1)}p' - \mho^{(0.2)}p'' - \dots, \\ \dfrac{dp'}{dt} = -[\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \dots]q' + \mho^{(1.0)}q' + \mho^{(1.2)}q'' + \dots, \\ \dfrac{dq'}{dt} = [\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \dots]p' - \mho^{(1.0)}p' - \mho^{(1.2)}p'' - \dots \end{array} \right.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots$$

équations de forme linéaire et dont tous les coefficients sont constants.

Pour ramener à la même forme les équations qui déterminent les variations séculaires des excentricités et des longi-

Digitized by Google

tudes des périhélies, on peut poser

$$(b)\qquad \begin{array}{ll} h = e \sin \omega, & l = e \cos \omega, \\ h' = e' \sin \omega', & l' = e' \cos \omega', \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

on a alors

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dh}{dt} = l\dfrac{d\omega}{dt} + \dfrac{h}{e}\dfrac{de}{dt}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{hd\omega}{dt} + \dfrac{l}{e}\dfrac{de}{dt}, \\ \dfrac{dh'}{dt} = l'\dfrac{d\omega'}{dt} + \dfrac{h'}{e'}\dfrac{de'}{dt}, & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{h'd\omega'}{dt} + \dfrac{l'de'}{e'dt}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

et comme en employant la notation des fonctions $\mho$

$$\frac{de}{dt} = \mho'^{(0.1)} e' \sin(\omega' - \omega) + \mho'^{(0.2)} e'' \sin(\omega'' - \omega) + \ldots$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \ldots - \mho^{(0.1)} \frac{e'}{e} \cos(\omega' - \omega)$$
$$- \mho'^{(0.2)} \frac{e''}{e} \cos(\omega'' - \omega) - \ldots,$$

$$\frac{de'}{dt} = \mho'^{(1.0)} e \sin(\omega - \omega') + \mho'^{(1.2)} e'' \sin(\omega'' - \omega') + \ldots,$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = \mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \ldots - \mho'^{(1.0)} \frac{e}{e'} \cos(\omega - \omega')$$
$$- \mho'^{(1.2)} \frac{e''}{e'} \cos(\omega'' - \omega') - \ldots,$$

on en conclut

$$(\mathrm{II})\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dh}{dt} = [\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \ldots]\, l - \mho'^{(0.1)} l' - \mho'^{(0.2)} l'' - \ldots, \\ \dfrac{dl}{dt} = -[\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \ldots] h + \mho'^{(0.1)} h' + \mho'^{(0.2)} h'' + \ldots, \\ \dfrac{dh'}{dt} = [\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \ldots]\, l' - \mho'^{(1.0)} l - \mho'^{(1.2)} l'' - \ldots, \\ \dfrac{dl'}{dt} = -[\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \ldots] h' + \mho'^{(1.0)} h + \mho'^{(1.2)} h'' + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Digitized by Google

système qui, étant linéaire du premier ordre et à coefficients constants, peut toujours s'intégrer par les méthodes connues.

Les valeur p, q, p', q' et h, l, h', l' une fois déterminées par l'intégration des systèmes (I) et (II), on obtiendra celles de φ, θ, φ', θ'... et de e, ω, e', ω'..., à l'aide des relations suivantes, qui lient les anciennes variables aux nouvelles

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2+q^2}, \qquad \operatorname{tang}\varphi' = \sqrt{p'^2+q'^2}\ldots$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{q}, \qquad \operatorname{tang}\theta' = \frac{p'}{q'}\ldots$$

$$e^2 = \sqrt{h^2+l^2}, \qquad e'^2 = \sqrt{h'^2+l'^2}\ldots$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{h}{l}, \qquad \operatorname{tang}\omega' = \frac{h'}{l'}\ldots$$

II. — Intégration du système relatif aux excentricités et aux longitudes des périhélies

Les équations (I) et (II) d'où dépend, en dernière analyse, la détermination rigoureuse des variations séculaires des éléments elliptiques, forment deux systèmes linéaires du premier ordre tout à fait analogues, quoique distincts l'un de l'autre; et dans chacun d'eux le nombre des équations y est double de celui des orbites que l'on considère. Qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre de ces systèmes, il est clair qu'on y satisfaira en prenant pour les valeurs de l, h, p', q'.., des expressions de cette forme

$$\mathcal{N}\,\frac{\sin}{\cos}\,(gt+\alpha),$$

où g, α et $\mathcal{N}$ sont des constantes indéterminées.

Digitized by Google

Considérons en particulier le système (II) qui se rapporte aux variables h, l, h', l',... et posons

$$h = N \sin(gt + \alpha), \qquad l = N \cos(gt + \alpha),$$
$$h' = N' \sin(gt + \alpha), \qquad l' = N' \cos(gt + \alpha),$$
$$h'' = N'' \sin(gt + \alpha), \qquad l'' = N'' \cos(gt + \alpha),$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations proposées (II), il en résultera les équations de condition suivantes :

$$gN - [\mho^{(0.1)} + \mho^{(0.2)} + \dots]N + N'\mho'^{(0.1)} + N''\mho'^{(0.2)} + \dots = 0,$$
$$gN' - [\mho^{(1.0)} + \mho^{(1.2)} + \dots]N' + N\mho'^{(1.0)} + N''\mho'^{(1.2)} + \dots = 0,$$
$$gN'' - [\mho^{(2.0)} + \mho^{(2.1)} + \dots]N'' + N\mho'^{(2.0)} + N'\mho'^{(2.1)} + \dots = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

dont le nombre sera précisément égal à celui des constantes N, N', N''... ou à celui des corps m, m', m''... du système.

Soit ν ce nombre. On aura ainsi ν constantes indéterminées et un pareil nombre d'équations entre ces constantes; et si l'on élimine successivement ces ν constantes, il est aisé de voir que la dernière disparaîtra d'elle-même, en sorte qu'il restera une équation finale en g du degré ν, laquelle ne contenant plus d'inconnue que la constante g, pourra servir à la déterminer.

Cette équation en g donnera ainsi ν racines g, g_1, g_2, g_3... à chacune desquelles correspondront respectivement les systèmes de coefficients indéterminés $(N, N', N''\dots)$, $(N_1, N'_1, N''_1\dots)$, $(N_2, N'_2, N''_2\dots)$... Le système des 2ν équations (II) sera donc

Digitized by Google

satisfait, en prenant

$$(a)\begin{cases} h = N\sin(gt+\alpha) + N_1\sin(g_1t+\alpha_1) + N_2\sin(g_2t+\alpha_2) + \ldots \\ h' = N'\sin(gt+\alpha) + N'_1\sin(g_1t+\alpha_1) + N'_2\sin(g_2t+\alpha_2) + \ldots \\ h'' = N''\sin(gt+\alpha) + N''_1\sin(g_1t+\alpha_1) + N''_2\sin(g_2t+\alpha_2) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l = N\cos(gt+\alpha) + N_1\cos(g_1t+\alpha_1) + N_2\cos(g_2t+\alpha_2) + \ldots \\ l' = N'\cos(gt+\alpha) + N'_1\cos(g_1t+\alpha_1) + N'_2\cos(g_2t+\alpha_2) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et ces équations renfermant 2ν constantes arbitraires $N, N_1, N_2 \ldots \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ seront les intégrales complètes des équations différentielles proposées.

Il reste à déterminer les valeurs de ces 2ν constantes arbitraires, ce qui ne peut se faire que par les observations. A la vérité celles-ci ne les donneront pas directement, mais on pourra toujours les déduire des valeurs de $h, h' \ldots l, l' \ldots$ et par suite de e, ω, e'. ω'.. que l'observation fait connaître pour une époque donnée. Si l'on suppose, par exemple, que les valeurs des 2ν variables h, $h' \ldots$ l, $l' \ldots$ soient connues pour l'époque $t = 0$, on aura, en désignant par $h_0, h'_0, \ldots$ ces valeurs initiales,

$$\begin{aligned} h_0 &= N\sin\alpha + N_1\sin\alpha_1 + N_2\sin\alpha_2 + \ldots \\ h'_0 &= N'\sin\alpha + N'_1\sin\alpha_1 + N'_2\sin\alpha_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_0 &= N\cos\alpha + N_1\cos\alpha_1 + N_2\cos\alpha_2 + \ldots \\ l'_0 &= N'\cos\alpha + N'_1\cos\alpha_1 + N'_2\cos\alpha_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

relations qui, étant au nombre de 2ν, serviront à déterminer les constantes N, $N_1 \ldots$ α, $\alpha_1 \ldots$, dont il s'agit.

Digitized by Google

III. — Intégration du système relatif aux inclinaisons et aux longitudes des nœuds

Le système d'équations qu'il s'agit d'intégrer est le suivant :

$$\frac{dp}{dt} = -[\mathcal{V}^{(0.1)} + \mathcal{V}^{(0.2)} + \ldots]\, q + \mathcal{V}^{(0.1)} q' + \mathcal{V}^{(0.2)} q'' + \ldots,$$

$$\frac{dq}{dt} = [\mathcal{V}^{(0.1)} + \mathcal{V}^{(0.2)} + \ldots]\, p - \mathcal{V}^{(0.1)} p' + \mathcal{V}^{(0.2)} p'' - \ldots,$$

$$\frac{dp'}{dt} = -[\mathcal{V}^{(1.0)} + \mathcal{V}^{(1.2)} + \ldots]\, q' + \mathcal{V}^{(1.0)} q' + \mathcal{V}^{(1.2)} q'' + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dq'}{dt} = [\mathcal{V}^{(1.0)} + \mathcal{V}^{(1.2)} + \ldots]\, p' - \mathcal{V}^{(1.0)} p - \mathcal{V}^{(1.2)} p'' - \ldots$$

Ces équations ne diffèrent, comme on le voit, de celles (II), qu'en ce que h, l, h', l'... y sont remplacées par p, q, p', q', et $\mathcal{V}'^{(0.1)} l'$, $\mathcal{V}'^{(0.2)} l''$... par $\mathcal{V}^{(0.1)} p'$, $\mathcal{V}^{(0.2)} p''$.... Le système précédent est donc entièrement semblable à celui (II) et peut s'intégrer de la même manière. Si donc l'on pose comme au § II

$$p = \mathrm{N} \sin (gt + \alpha), \qquad q = \mathrm{N} \cos (gt + \alpha),$$
$$p' = \mathrm{N}' \sin (gt + \alpha), \qquad q' = \mathrm{N}' \cos (gt + \alpha),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

il en résultera les ν équations de condition

$$g\mathrm{N} + [\mathcal{V}^{(0.1)} + \mathcal{V}^{(0.2)} + \ldots]\, \mathrm{N} - \mathrm{N}' \mathcal{V}^{(0.1)} - \mathrm{N}'' \mathcal{V}^{(0.2)} - = 0,$$
$$g\mathrm{N}' + [\mathcal{V}^{(1.0)} + \mathcal{V}^{(1.2)} + \ldots]\, \mathrm{N}' - \mathrm{N} \mathcal{V}^{(1.0)} - \mathrm{N}'' \mathcal{V}^{(1.2)} - = 0,$$
$$g\mathrm{N}'' + [\mathcal{V}^{(2.0)} + \mathcal{V}^{(2.1)} + \ldots]\, \mathrm{N}'' - \mathrm{N} \mathcal{V}^{(2.0)} - \mathrm{N}' \mathcal{V}^{(2.1)} - = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Digitized by Google

et l'élimination successive des constantes indéterminées N, N′, N″... conduira à une équation finale en g, dont les diverses racines seront g, g_1, g_2... Une de ces racines sera nécessairement nulle, car d'après la forme des équations précédentes, il est clair que l'on peut y satisfaire en faisant $g = 0$ et $N = N' = N'' = \ldots$ Ainsi $g = 0$ sera une des racines de l'équation en g, ce qui abaissera cette équation au degré $\nu - 1$. Par suite, on aura pour les expressions générales des variables p, p', q, q'.. ou pour les intégrales complètes des équations différentielles proposées :

$$(b)\quad \begin{cases} p = N \sin\alpha + N_1 \sin(g_1 t + \alpha_1) + N_2 \sin(g_2 t + \alpha_2) + \ldots \\ p' = N' \sin\alpha + N'_1 \sin(g_1 t + \alpha_1) + N'_2 \sin(g_2 t + \alpha_2) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q = N \cos\alpha + N_1 \cos(g_1 t + \alpha_1) + N_2 \cos(g_2 t + \alpha_2) + \ldots \\ q' = N' \cos\alpha + N'_1 \cos(g_1 t + \alpha_1) + N'_2 \cos(g_2 t + \alpha_2) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

N, N′, N″... α, α_1, α_2 étant des constantes arbitraires dépendant de la position des orbites, et que l'on déterminera au moyen des observations, comme on l'a dit pour le système relatif aux excentricités et aux longitudes des périhélies.

IV. — Remarque sur le calcul numérique des intégrales précédentes

Le calcul de l'équation en g, sur lequel repose l'évaluation numérique des intégrales (a) et (b), devient très difficile à mesure que le nombre des orbites augmente; car alors le degré de l'équation s'élève et les éliminations se compliquent de

Digitized by Google

plus en plus. Lorsqu'on ne considère que les actions réciproques de deux planètes m et m', ce calcul est des plus simples ; alors l'équation en g est du second degré et se résout facilement au moyen des règles connues de l'élimination. Dans ce cas particulier, on a, en effet, en ne considérant que le système formé par les excentricités et les longitudes des périhélies,

$$\frac{dh}{dt} = \upsilon^{(0.1)} l - \upsilon'^{(0.1)} l',$$

$$\frac{dl}{dt} = -\upsilon^{(0.1)} h + \upsilon'^{(0.1)} h',$$

$$\frac{dh'}{dt} = \upsilon^{(0.1)} l' - \upsilon'^{(1.0)} l,$$

$$\frac{dl'}{dt} = -\upsilon^{(1.0)} h' + \upsilon'^{(1.0)} h;$$

et en posant

$$h = \mathrm{N} \sin (gt + \alpha),$$
$$h' = \mathrm{N}' \sin (gt + \alpha),$$
$$l = \mathrm{N} \cos (gt + \alpha),$$
$$l' = \mathrm{N}' \cos (gt + \alpha),$$

on obtient

$$\{ g - \upsilon^{(0.1)} \} \mathrm{N} + \mathrm{N}' \upsilon'^{(0.1)} = 0,$$
$$\{ g - \upsilon^{(1.0)} \} \mathrm{N}' + \mathrm{N} \upsilon'^{(1.0)} = 0.$$

Ces équations de condition donnent

$$\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}} = \frac{\upsilon^{(0.1)} - g}{\upsilon'^{(0.1)}} = \frac{\upsilon'^{(1.0)}}{\upsilon^{(1.0)} - g},$$

d'où l'on déduit

$$(g - \upsilon^{(0.1)}) (g - \upsilon^{(1.0)}) - \upsilon'^{(0.1)} \upsilon'^{(1.0)} = 0.$$

Digitized by Google

équation du deuxième degré en g, qui se transforme aisément dans la suivante :

$$g^2 - Pg + P - Q = 0,$$

en faisant

$$\mathcal{V}^{(0.1)} + \mathcal{V}^{(1.0)} = P,$$
$$\mathcal{V}'^{(0.1)} + \mathcal{V}'^{(1.0)} = Q.$$

g et g' désignant les deux racines de cette équation, on a donc

$$g = \frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q},$$
$$g' = \frac{P}{2} - \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q}.$$

Si l'on représente maintenant par $[h_0]$, $[h'_0]$, $[l_0]$, $[l'_0]$ les valeurs numériques des quantités h, h', l, l', calculées pour le midi moyen du 1er janvier 1850, époque pour laquelle nous prendrons $t = 0$, et par $[\mathfrak{N}]$, $[\mathfrak{M}]$ les nombres qui expriment les rapports $\frac{N'}{N}$, $\frac{N'_1}{N_1}$ respectivement égaux à $\frac{\mathcal{V}^{(0.1)} - g}{\mathcal{V}'^{(0.1)}}$, $\frac{\mathcal{V}^{(0.1)} - g'}{\mathcal{V}'^{(0.1)}}$, on aura pour l'époque adoptée

$$[h_0] = N \sin \alpha + N_1 \cos \alpha, \qquad [l_0] = N \cos \alpha + N_1 \cos \alpha_1,$$
$$[h'_0] = [\mathfrak{N}]\, N \sin \alpha + [\mathfrak{M}]\, N_1 \sin \alpha_1,$$
$$[l'_0] = [\mathfrak{N}]\, N \cos \alpha + [\mathfrak{M}]\, N_1 \cos \alpha_1,$$

équations d'où il sera facile de tirer les valeurs numériques des quantités $N \sin \alpha$, $N_1 \sin \alpha_1$, $N \cos \alpha$, $N_1 \cos \alpha_1$ et par suite celles des quatre constantes arbitraires N, N_1, α, α_1.

Nous donnerons à la fin de l'Ouvrage les valeurs en nombres de h, h' l, l' pour les huit planètes principales, ainsi que

Digitized by Google

celles des quantités $\mathcal{V}^{(0.1)}$, $\mathcal{V}'^{(0.1)}$... qui dépendent des masses et des grands axes. Ces dernières sont exprimées en secondes sexagésimales.

V. — Intégration de l'expression différentielle de la variation séculaire de l'époque

Il nous reste à considérer la variation différentielle de la longitude de l'époque dont nous avons donné l'expression au § III du chapitre précédent.

En exprimant dans l'équation (B), les éléments e, ω, e', ω', en fonction des variables h, l, h', l', et remarquant que

$$e^2 = h^2 + l^2, \quad e'^2 = h'^2 + l'^2,$$
$$ee' \cos(\omega' - \omega) = hh' + ll',$$

on transforme cette équation dans la suivante :

$$(\mathrm{B}') \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = m'an \{ \mathrm{V} + \mathrm{V}_1 (h^2 + l^2) + \mathrm{W} (hh' + ll')$$
$$+ \mathrm{W}_1 [(p' - p)^2 + (q' - q)^2 - (h'^2 + l'^2) \}.$$

Pour avoir la valeur de ε relative à un temps quelconque, il faut, comme on le sait, remplacer dans le second membre de cette dernière expression h, h', l, et l' par leurs valeurs (α) page 238. Or si, en ne considérant que l'action mutuelle de deux planètes, cas pour lequel l'équation (B') peut s'intégrer exactement, on pose

$$h^2 + l^2 = \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}_1^2 + 2\,\mathrm{NN}_1 \cos[(g_1 - g)\,t + \alpha_1 - \alpha],$$
$$h'^2 + l'^2 = \mathrm{N}'^2 + \mathrm{N}_1'^2 + 2\,\mathrm{N}'\mathrm{N}_1' \cos[(g_1 - g)\,t + \alpha_1 - \alpha],$$
$$hh' + ll' = \mathrm{NN}' + \mathrm{N}_1\mathrm{N}_1' + (\mathrm{N}\mathrm{N}_1' + \mathrm{N}'\mathrm{N}_1) \cos[(g_1 - g)\,t + \alpha_1 - \alpha],$$

Digitized by Google

et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (B'), il n'est pas difficile de voir qu'il en résultera pour $\frac{d\varepsilon}{dt}$ deux espèces différentes de termes: les uns seulement fonctions de V, V_1, W, W_1 N, N_1, N', N'_1 seront constants [et dans ceux-ci entrera nécessairement le carré de la tangente de l'inclinaison mutuelle des deux orbites (*a*),] et les autres dépendants des mêmes quantités, seront affectés des cosinus de l'angle $[(g_1-g)t+\alpha_1-\alpha]$. Les termes constants produiront dans l'expression de ε des termes proportionnels au temps, et qu'on pourra négliger, puisqu'ils s'ajouteraient au moyen mouvement nt dans la valeur $nt+\varepsilon$ de la longitude moyenne; et quant aux termes en cosinus, ils acquerront par l'intégration de très petits diviseurs de l'ordre des masses m et m', et pourront par là devenir sensibles dans la suite des siècles. Ce sont ces termes qui donnent naissance aux inégalités séculaires de la longitude de l'époque. Dans la théorie des Planètes et même pour Jupiter et Saturne dont les masses sont très considérables, les termes dont nous parlons ont des valeurs tout à fait inappréciables, mais ils sont au contraire fort sensibles dans la théorie de la Lune et des satellites de Jupiter, et c'est princi-

(*a*) Il est aisé de prouver, en effet, que dans le cas de deux planètes soumises à leur action réciproque, cette quantité doit rester constante.

Dans ce cas qui est à très peu près celui de Jupiter et de Saturne, on a en faisant $m\mathfrak{M} = \Pi$ et ayant égard seulement aux variations des inclinaisons et aux termes qui sont du premier ordre par rapport à ces quantités,

$$\Pi = mm'\left\{\frac{1}{2}A^{(0)} - \frac{1}{8}\left[(p'-p)^2 + (q'-q)^2\right]\right\}.$$

Mais la fonction Π doit conserver une valeur constante qu'elles que soient les variations que viennent à subir dans la suite des siècles les quantités p, q, p' q' (Chap. I, § IV). On a donc

$$(p'-p)^2 + (q'-q)^2 = \tang^2\gamma = \textit{constante}.$$

Digitized by Google

palement aux termes de cette espèce que sont dues les inégalités que l'on observe dans le mouvement de ces corps.

D'après ce qui précède, on voit donc que, abstraction faite des termes proportionnels à nt et qui sont trop peu sensibles pour qu'on y ait égard, on peut mettre l'expression de $\frac{d\varepsilon}{dt}$ sous la forme suivante :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathrm{K} \cos [(g_1 - g)\, t + \alpha_1 - \alpha];$$

d'où résulte par l'intégration

$$(a) \qquad \delta\varepsilon = \frac{\mathrm{K}}{g_1 - g} \sin [(g_1 - g)\, t + \alpha_1 - \alpha],$$

K étant un coefficient fonction de V_1, V, W, W_1, N, N_1,..., c'est-à-dire une constante dont la valeur est connue.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Considérations générales sur la forme des intégrales précédentes. Conséquences qui en résultent relativement à la stabilité du système du monde.

I. — Nature des racines de l'équation en g. Première condition relative a la stabilité du système du monde.

L'intégration des systèmes d'équations (I) et (II) que nous avons effectuée dans le chapitre précédent, nous a conduit à des valeurs de h, h', l, l'... p, p', q, q'... qui sont la somme d'un nombre fini de sinus et de cosinus d'angles proportionnels au temps, et dans lesquelles les coefficients de t sont les racines d'une équation algébrique d'un degré égal au nombre des planètes que l'on considère. Pour que ces valeurs demeurent toujours fort petites, il faut donc que les racines de l'équation dont nous parlons soient toutes réelles, et il faut de plus qu'elles soient différentes les unes des autres (a) ; car si elles étaient imaginaires et égales, les expressions de h, l, h', l'...

(a) Cette condition est toujours remplie dans le cas de deux planètes m et m' agissant simultanément : car on tombe alors sur une équation du second degré

$$g^2 - Pg + P - Q = 0$$

dont les racines sont toujours réelles.

Digitized by Google

contiendraient des termes ayant t en facteur ou en exposant, lesquels seraient ainsi susceptibles de croître indéfiniment avec le temps. Dans ce cas, on ne pourrait donc plus compter sur l'exactitude des résultats obtenus, du moins pour un temps indéfini, et la stabilité du système planétaire cesserait d'être assurée relativement aux excentricités et aux inclinaisons.

Nous allons démontrer que, fort heureusement, ces cas ne se rencontrent pas dans le système du monde, du moins lorsqu'on n'a égard qu'à l'action mutuelle des planètes, et qu'ainsi les valeurs générales de h, h', l, l',... p, p'... ne sauraient contenir que des termes périodiques.

Considérons en particulier les valeurs de h, l, h',l'... qui proviennent de l'intégration du système (II). Quelle que soit la nature des racines de l'équation en g qui s'y rapporte, les valeurs générales de ces variables pourront être représentées par des expressions de cette forme

$$\begin{aligned}
h &= \mathfrak{S}\beta^{\alpha t} + \mathfrak{D}\beta^{\alpha' t} + \ldots\ldots + \mathfrak{s}^{t\sigma} + \mathfrak{V}^{t\sigma-1} + \ldots + h_1,\\
l &= \mathfrak{B}\beta^{\alpha t} + \mathfrak{C}\beta^{\alpha' t} + \ldots\ldots + \mathfrak{T}t^{\sigma} + \mathfrak{U}t^{\sigma-1} + \ldots + l_1,\\
h' &= \mathfrak{S}'\beta^{\alpha t} + \mathfrak{D}'\beta^{\alpha' t} + \ldots\ldots + \mathfrak{s}'t^{\sigma} + \mathfrak{V}'^{t\sigma-1} + \ldots + h'_1,\\
l' &= \mathfrak{B}'\beta^{\alpha t} + \mathfrak{C}'\beta^{\alpha' t} + \ldots\ldots + \mathfrak{T}'t^{\sigma} + \mathfrak{U}t^{\sigma-1} + \ldots + l'_1,
\end{aligned}$$

β étant la base du système des logarithmes népériens, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$... $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}'$..., α, α', α''..., des constantes réelles, et h_1, l_1, h'_1, l'_1... des quantités périodiques.

Si donc l'on suppose $\alpha > \alpha'$, $\alpha' > \alpha''$, etc., on aura

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}
e^2 = h^2 + l^2 &= (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{B}^2)\,\beta^{2\alpha t} + (\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2)\beta^{2\alpha' t} + \ldots\\
&\quad + (\mathfrak{s}^2 + \mathfrak{T}^2)\,t^{2\sigma} + \ldots\ldots + h_1^2 + l_1^2,\\
e'^2 = h'^2 + l'^2 &= (\mathfrak{S}'^2 + \mathfrak{B}'^2)\beta^{2\alpha t} + (\mathfrak{D}'^2 + \mathfrak{C}'^2)\beta^{2\alpha' t} + \ldots\\
&\quad + (\mathfrak{s}'^2 + \mathfrak{T}'^2)\,t^{2\sigma} + \ldots\ldots + h'^2_1 + l'^2_1,
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

et il s'agira de prouver que ni les exponentielles, ni les arcs de cercle ne peuvent entrer dans les valeurs de e, e'... et qu'ainsi ces valeurs se réduisent aux seuls termes périodiques h_1+l_1, $h'_1+l'_1$, etc.

Pour cela, reprenons les expressions que nous avons données pour déterminer $\frac{dh}{dt}, \frac{dl}{dt}$... ou les équations (II) du chapitre précédent. Si l'on multiplie ces équations respectivement par $m\sqrt{a}h$, $m\sqrt{a}l$, $m'\sqrt{a'}h'$, $m'\sqrt{a'}l'$... puis qu'on joute ensemble les produits ainsi formés, le second membre de l'équation résultante sera nul en vertu des relations (I) du chapitre II, et cette équation se réduira à la suivante :

$$m\sqrt{a}\left(h\frac{dh}{dt}+l\frac{dl}{dt}\right)+m'\sqrt{a'}\left(h'\frac{dh'}{dt}+l'\frac{dl'}{dt}\right)+\ldots=0.$$

Mais

$$h\frac{dh}{dt}+l\frac{dl}{dt}=ede, \qquad h'\frac{dh'}{dt}+l'\frac{dl'}{dt}=e'de' \quad \text{etc.}$$

Faisant ces substitutions et intégrant ensuite, en observant que les grands axes a, a'... sont constants, on aura

$$(m) \qquad e^2m\sqrt{a}+e'm'\sqrt{a'}+\ldots \text{C},$$

C désignant une constante.

Maintenant, si l'on substitue dans cette équation à la place de e^2, e'^2... leurs valeurs précédentes (α), on trouvera

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{l} [(\mathfrak{S}^2+\mathfrak{B}^2)m\sqrt{a}+(\mathfrak{S}'^2+\mathfrak{B}'^2)m'\sqrt{a'}+..]\,\beta^{2\alpha t}+.. \\ +[(\mathfrak{D}^2+\mathfrak{C}^2)m\sqrt{a}+(\mathfrak{D}'^2+\mathfrak{C}'^2)m'\sqrt{a'}+..]\,\beta^{2\alpha' t}+.. \\ +[(\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2)m\sqrt{a}+(\mathfrak{S}'^2+\mathfrak{T}'^2)m'\sqrt{a'}+..]\,t^{2\sigma}+.. \\ +(h_1^2+l_1^2)m\sqrt{a}+(h_1'^2+l_1'^2)\,m'\sqrt{a'}+..=\text{C}. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

équation qui, devant avoir lieu quelque soit le temps t, se décompose d'elle-même en les trois suivantes :

$$(\mathfrak{S}^2+\mathfrak{B}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathfrak{S}'^2+\mathfrak{B}'^2)\,m'\sqrt{a'}+\ldots=0$$
$$(\mathfrak{D}^2+\mathfrak{C}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathfrak{D}'^2+\mathfrak{C}'^2)\,m'\sqrt{a'}+\ldots=0,$$
$$(\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathfrak{S}'^2+\mathfrak{T}'^2)\,m'\sqrt{a'}+\ldots=0.$$

Mais $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$..., $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$..., $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$... sont des quantités réelles ; et si l'on suppose que les corps m, m'... tournent tous dans le même sens, $m\sqrt{a}$, $m'\sqrt{a'}$, etc., seront nécessairement des quantités positives. Pour que les équations précédentes puissent subsister, il faut donc que l'on ait à la fois

$$\mathfrak{S}=0,\quad \mathfrak{B}=0,\quad \mathfrak{S}'=0,\quad \mathfrak{B}'=0,\quad \text{etc.}$$
$$\mathfrak{D}=0,\quad \mathfrak{C}=0,\quad \mathfrak{D}'=0,\quad \mathfrak{C}'=0,\quad \text{etc.}$$
$$\mathfrak{S}=0,\quad \mathfrak{T}=0,\quad \mathfrak{S}'=0,\quad \mathfrak{T}'=0,\quad \text{etc.}$$

Ainsi les valeurs de h, l, h', l'... et par suite celles de e, e'... ne peuvent renfermer ni exponentielles ni arcs de cercle, et l'équation en g a toutes ses racines réelles et inégales. Ces valeurs se réduisent, en effet, aux quantités périodiques $h_1, +l_1$, $h_1, +l'_1$,..., et l'on a en vertu de l'équation (β)

$$(h^2+l^2)\,m\sqrt{a}+(h'^2+l^2)\,m'\sqrt{a}+\ldots=\mathrm{C}.$$

Nous supprimons ici l'indice 1 devenu inutile.

Par une analyse entièrement semblable appliquée aux valeurs de p, q, p', q'... on trouverait que

$$(p^2+q^2)\,m\sqrt{a}+(p'^2+q'^2\,m')\sqrt{a'}+\ldots=\mathrm{C},$$

c'est-à-dire

$$(n)\qquad \tan^2\varphi\; m\sqrt{a}+\tan^2\varphi'\; m'\sqrt{a'}+\ldots=\mathrm{C};$$

Digitized by Google

et de là on conclurait, comme dans le cas qui précède, que ces valeurs ne peuvent contenir ni exponentielles ni arcs de cercle, et que, par conséquent, l'équation en g à toutes ses racines réelles et inégales.

Les équations (m) et (n) qui précèdent résultent très simplement des équations différentielles que nous avons données au paragraphe IV du chapitre I pour déterminer l, h, l', h', p, q, p', q'... En effet, si dans le groupe des équations (a) qui se rapporte aux variables l, h, l', h'... on multiplie la première par $m\sqrt{a}h$, la seconde par $m\sqrt{a}\,l$, la troisième par $m'\sqrt{a'}h'$, la quatrième par $m'\sqrt{a'}\,l'$, et ainsi de suite ; puis qu'on ajoute entre eux les produits ainsi formés, on aura

$$m\sqrt{a}\,\frac{hdh+ldl}{dt}+m'\sqrt{a'}\,\frac{h'dh'+l'dl'}{dt}+\text{etc.}$$
$$=h\frac{d\beta}{dl}-l\frac{d\beta}{dh}+h'\frac{d\beta}{dl'}-l'\frac{d\beta}{dh'}+\text{etc.},$$

équation dont le second membre est nul par la nature même de la fonction β qui est symétrique en h et l, h' et l', etc.

Si donc l'on observe que

$$h^2+l^2=e^2\,,\quad h'^2+l'^2=e'^2\ldots,$$

on aura

$$m\sqrt{a}\,e\,de+m'\sqrt{a'}\,e'\,de'+\ldots=0,$$

et par suite

$$m\sqrt{a}\,e^2+m'\sqrt{a'}\,e'^2+\ldots=const.$$

Des équations en dp, dq, dp' dq',.. on déduirait semblable-

Digitized by Google

ment

$$m\sqrt{a}\,\frac{pdp+qdq}{dt}+m'\sqrt{a'}\,\frac{p'dp'+q'dq'}{dt}+\ldots$$
$$=p\,\frac{d\mathfrak{Q}}{dq}-q\,\frac{d\mathfrak{Q}}{dp}+p'\,\frac{d\mathfrak{Q}}{dq'}-q'\,\frac{d\mathfrak{Q}}{dp'}+\ldots,$$

équation dont le second membre est nul, puisque $\mathfrak{Q}$ est une fonction symétrique de p et q, p' et q', etc. On a donc

$$m\sqrt{a}\,(p^2+q^2)+m'\sqrt{a'}\,(p'^2+q'^2)+\ldots=const.$$

ou en remplaçant (p^2+q^2), $(p'^2+q'^2)\ldots$ par leurs valeurs

$$m\sqrt{a}\,\text{tang}^2\varphi+m'\sqrt{a'}\,\text{tang}^2\varphi'+\ldots=const.$$

Il existe entre les vitesses des nœuds et celles des périhélies des relations analogues aux précédentes et qui se déduisent également des équations en dh, $dl\ldots$ dp, $dq\ldots$, que nous avons formées au paragraphe I. En effet, si dans le groupe des équations (a), on multiplie la première par $m\sqrt{a}\,l$, la seconde par $-m\sqrt{a}\,h$, la troisième par $m'\sqrt{a'}\,l'$, la quatrième par $-m'\sqrt{a'}\,h'$ etc.; puis qu'on ajoute entre eux les produits résultants, on aura

$$m\sqrt{a}\left(\frac{ldh-hdl}{dt}\right)+m'\sqrt{a'}\left(\frac{l'dh'-h'dl'}{dt}\right)+\text{etc.}$$
$$=l\,\frac{d\mathfrak{H}}{dl}+h\,\frac{d\mathfrak{H}}{dh}+l'\,\frac{d\mathfrak{H}}{dl'}+h'\,\frac{d\mathfrak{H}}{dh'}+\text{etc.},$$

ou bien, en observant que $\mathfrak{H}$ est une fonction homogène et du second ordre par rapport à h, l, h', $l'\ldots$,

$$m\sqrt{a}\left(\frac{ldh-hdl}{dt}\right)+m'\sqrt{a'}\left(\frac{l'dh'-h'dl'}{dt}\right)+\text{etc.}=2\mathfrak{H}.$$

Digitized by Google

On a d'ailleurs tang $\omega = \frac{h}{l}\cdots$; d'où par la différentiation

$$ldh - hdl = e^2 d\omega, \quad l'dh' - h'dl' = e'^2 d\omega', \text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura donc

$$(p) \qquad m\sqrt{a}\, e^2 \frac{d\omega}{dt} + m'\sqrt{a'}\, e'^2 \frac{d\omega'}{dt} + \ldots = 2\mathfrak{H} = const.$$

Du groupe d'équations en dp, dq, dp', dq'..., on déduirait semblablement

$$m\sqrt{a}\left(\frac{qdp - pdq}{dt}\right) + m'\sqrt{a'}\left(\frac{q'dp' - p'dq'}{dt}\right) + \ldots = 2\mathfrak{Q} = const.$$

et comme d'après l'équation tang $\theta = \frac{p}{q}$,

$$qdp - pdq = \text{tang}^2\varphi\, d\theta,$$
$$q'dp' - p'dq' = \text{tang}^2\varphi'\, d\theta',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on aurait

$$(q) \qquad m\sqrt{a}\,\text{tang}^2\varphi \frac{d\theta}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\text{tang}^2\varphi' \frac{d\theta'}{dt} + \ldots = const.$$

Ces équations (p) et (q) montrent que les vitesses angulaires $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}\cdots$ des périhélies des orbites de m, m'... et celles $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$ ... de leurs nœuds ne peuvent pas croître indéfiniment, si on les suppose toutes de même signe.

Digitized by Google

II. — Ordre de grandeur des quantités N, N_1, N_2.. — Seconde condition nécessaire a la stabilité du système du monde.

La condition énoncée ci-dessus, à savoir que l'équation en g doit avoir toutes ses racines réelles et inégales pour que les valeurs de h, l, h', l'.., p, q, p', q'.. et, par suite, celles de e, e'.. φ, φ'.. ne puissent pas croître indéfiniment, est nécessaire pour assurer la stabilité du système planétaire, mais elle n'est pas suffisante pour établir dans toute sa rigueur cet important principe. Comme le montrent d'ailleurs les équations $e^2 = h^2 + l^2$, $\tang \varphi = p^2 + q^2$..., il faut, de plus, que les coefficients N, N_1, N_2,.. qui sont des fonctions des racines g, g_1, g_2.. soient tous de très petites quantités de l'ordre des excentricités et des inclinaisons; car si l'on substitue dans ces équations pour h, l, p et q leurs valeurs (a) et (b), on obtient

$$e = \sqrt{N^2 + N_1^2 + N_2^2 + \ldots + 2NN_1 \cos[(g_1 - g)t + \alpha_1 - \alpha] + \ldots}$$

$$\tang \varphi = \sqrt{M^2 + M_1^2 + M_2^2 + \ldots + 2MM_1 \cos[(g_1 - g)t + \alpha_1 - \alpha] + \ldots}.$$

expressions dont les premiers membres ne peuvent jamais surpasser la somme de tous les coefficients N, N_1, N_2,.. pris avec le même signe, tant que les cosinus qui entrent dans les seconds membres sont tous réels.

Le calcul de ces coefficients a été effectué pour l'ensemble des huit planètes principales, et l'on a reconnu qu'aucun d'eux ne pouvait devenir considérable. On peut donc être assuré que, dans la suite des siècles, les excentricités et les inclinai-

Digitized by Google

sons n'éprouveront pas de variations considérables, et qu'elles demeureront toujours très petites, comme elles le sont aujourd'hui.

III. — Déplacements séculaires des périhélies et des nœuds

Les équations qui déterminent pour un temps indéfini les positions des périhélies et des nœuds sont, comme nous l'avons vu,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \omega = \frac{h}{l}, \quad \operatorname{tang} \theta = \frac{p}{q},$$

h, l, p et q devant être remplacés dans ces équations par leurs valeurs (a) et (b).

Si l'on fait cette substitution dans la première des relations (1), on aura

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{N \sin (gt+\alpha) + N_1 \sin g_1 t + \alpha_1) + \ldots}{N \cos (gt+\alpha) + N_1 \cos (g_1 t + \alpha_1) + \ldots}$$

d'où, en retranchant de l'angle ω celui $gt + \alpha$ qui répond au coefficient N,

$$\operatorname{tang} (\omega - gt - \alpha)$$
$$= \frac{N_1 \sin [(g_1 - g)\, t + \alpha_1 - \alpha] + N_2 \sin [(g_2 - g) t + \alpha_2 - \alpha] + \ldots}{N + N_1 \cos [(g_1 - g) t + \alpha_1 - \alpha] + N_2 \cos [(g_2 - g) t + \alpha_2 - \alpha] + \ldots}$$

Soit maintenant

$$N > N_1 + N_2 + N_3 + \ldots$$

Il est clair que dans ce cas le dénominateur de l'expression

Digitized by Google

précédente ne pourra se réduire à zéro et que, par conséquent, tang $(\omega - gt - \alpha)$ ne pourra jamais devenir infini. Les oscillations de l'angle $\omega - gt - \alpha$, seront donc comprises entre les limites $+ 90°$ et $- 90°$, et $gt + \alpha$ représentera le moyen mouvement de l'angle ω ou du périhélie.

La même conclusion pouvant se tirer de la seconde des équations (1), on voit que, dans le cas particulier où le coefficient N est supposé plus grand que la somme de tous les autres coefficients pris positivement, les angles ω et θ sont renfermés dans des limites déterminées, et le nœud a nécessairement un mouvement de libration. Mais en dehors de ce cas, il est impossible de rien conclure, en général, sur la nature des angles ω et θ : leurs variations séculaires n'étant plus limitées, les points déterminés par ces deux éléments peuvent tourner indéfiniment dans le même sens, et parcourir successivement tous les arcs de la circonférence ; cependant, ce n'est qu'au bout de plusieurs milliers d'années que cette révolution entière peut s'accomplir.

Digitized by Google

CHAPITRE IV

Théorie des inégalités périodiques

I. — Développement des formules qui expriment les variations différentielles des éléments de l'orbite elliptique

Nous allons considérer dans ce Chapitre les inégalités qui dépendent de la position relative des orbites, et auxquelles donnent naissance, comme nous l'avons dit, les termes de la forme

$$\mathfrak{P} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i''n't - int + \mathfrak{A}).$$

Posons pour abréger

$$\mathfrak{N} = \frac{an}{\mu}, \qquad e = \sin\psi\,;$$

d'où

$$\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi} = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

Les formules qui déterminent les variations différentielles

Digitized by Google

des éléments de l'orbite de m seront pages 141 et 147

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = 2a\,\mathfrak{N}\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{N}}{\operatorname{tang}\psi}\,\frac{d\mathrm{R}}{de},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathfrak{N}\cos\psi\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\,\frac{d\mathrm{R}}{de} - 2a\mathfrak{N}\,\frac{d\mathrm{R}}{da},\\
&\frac{de}{dt} = -\,\mathfrak{N}\cos\psi\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} - \frac{\mathfrak{N}}{\operatorname{tang}\psi}\,\frac{d\mathrm{R}}{d\omega},\\
&\frac{dp}{dt} = \frac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\,\frac{d\mathrm{R}}{dq}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\,\frac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\,\frac{d\mathrm{R}}{dp}.
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières relations font connaître les variations de l'inclinaison et des nœuds de l'orbite de m; mais on peut leur donner une autre forme, en exprimant $\frac{d\mathrm{R}}{dq}$ et $\frac{d\mathrm{R}}{dp}$ en fonctions de η, ε, ω et τ.

En effet soient :

v et v' les angles que forment, avec la commune intersection des orbites de m et de m', les rayons vecteurs r et r';

θ et θ' les longitudes des nœuds ascendants de ces orbites ;

φ et φ' les inclinaisons de leurs plans sur celui des xy.

Si l'on suppose très petite l'inclinaison de l'orbite de m sur ce plan fixe, et qu'on pose

$$p = \sin\varphi\,\sin\theta\,,$$
$$q = \sin\varphi\,\cos\theta\,,$$

on aura

$$z \doteq r\sin(v-\theta)\sin\varphi = rq\sin v - rp\cos v\,,$$

d'où en supposant la fonction R développée par rapport à z,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dp} = \frac{d\mathrm{R}}{dz}\frac{dz}{dp} = -\frac{d\mathrm{R}}{dz}\,r\cos v,$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{dq} = \frac{d\mathrm{R}}{dz}\frac{dz}{dq} = \frac{d\mathrm{R}}{dz}\,r\sin v.$$

Digitized by Google

L'expression de $\frac{dR}{dz}$ est

$$\frac{dR}{dz} = m' \left(\frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right);$$

et si l'on prend pour plan des xy, le plan de l'orbite de m à une époque déterminée, l'inclinaison de son orbite primitive sur le plan fixe ainsi que l'ordonnée z seront de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant donc le carré de ces forces, on pourra faire $z = 0$, ce qui donnera

$$\frac{dR}{dz} = m' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) z'.$$

Mais le plan fixe coïncidant, à l'origine du temps, avec le plan de l'orbite de m, on a à cette époque

$$\theta = \theta' = \tau, \quad \gamma = \varphi', \quad \varphi = 0,$$

en sorte que

$$z' = r' \sin (v' - \tau) \sin \gamma.$$

On a donc

$$\frac{dR}{dz} = m' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin (v' - \tau) \sin \gamma,$$

et par conséquent

$$\frac{dR}{dp} = - m' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \cos v \sin (v' - \tau) \sin \gamma,$$

$$\frac{dR}{dq} = m' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin v \sin (v' - \tau) \sin \gamma.$$

γ représente dans ces formules l'inclinaison mutuelle des deux orbites et τ la longitude du nœud de l'orbite de m' sur celle de m.

Digitized by Google

Maintenant on a

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} = \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}^{(a)},$$

$$\frac{dR}{d\gamma} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{d\gamma}, \quad \frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{d\tau}.$$

On a d'ailleurs

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + r'^2 - \rho^2}{2r'^3}\right),$$

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)\left(1 - \sin^2\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$- 2rr'\cos(v' + v - 2\tau)\sin^2\frac{1}{2}\gamma = r^2 + r'^2$$

$$- 2rr'\cos(v' - v)\cos^2\frac{1}{2}\gamma - 2rr'\cos(v' + v - 2\tau)\sin^2\frac{1}{2}\gamma;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dR}{d\rho} = -m'\rho\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

$$\rho\frac{d\rho}{dv} = -rr'\left[\sin(v' - v)\cos^2\frac{1}{2}\gamma - \sin(v + v' - 2\tau)\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right],$$

$$\rho\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{1}{2}rr'\sin\gamma\left[\cos(v' - v) - \cos(v' + v - 2\tau)\right],$$

$$\rho\frac{d\rho}{d\tau} = -2rr'\sin^2\frac{1}{2}\gamma\sin(v' + v - 2\tau).$$

(a) Pour démontrer cette relation, il suffit de remarquer que, d'après les formules du mouvement elliptique, l'angle nt n'est introduit dans R que par la substitution des valeurs de r et de v. Or, comme dans ces valeurs l'angle nt est toujours accompagné des angles $+\varepsilon$ et $-\omega$, on a

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{ndt} + \frac{dR}{d\omega}, \quad \frac{dR}{ndt} = \frac{dR}{d\varepsilon},$$

d'où

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}.$$

Digitized by Google

Par conséquent

$$\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{dR}{d\omega}=m'rr'\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r'^3}\right)[\sin(v'-v)\cos^2\frac{1}{2}\gamma$$
$$-\sin(v'+v-2\tau)\sin^2\frac{1}{2}\gamma],$$

$$\frac{dR}{d\gamma}=-\frac{1}{2}m'rr'\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin\gamma[\cos(v'-v)-\cos(v'+v-2\tau)],$$

$$\frac{dR}{d\tau}=2m'rr'\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin^2\frac{1}{2}\gamma\sin(v'+v-2\tau).$$

En multipliant la première de ces relations par $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\cos\tau$, la seconde par $\sin\tau$ et la troisième par $\frac{\cos\tau}{\sin\gamma}$; puis les ajoutant, on a

$$\frac{dR}{d\gamma}\sin\tau+\frac{\cos\tau}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\tau}+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\cos\tau\left(\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{dR}{d\omega}\right)$$
$$=m'rr'\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos v\sin(v'-\tau)\sin\gamma.$$

On a semblablement, en multipliant les mêmes relations par $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\sin\tau$, $-\cos\tau$, $\frac{\sin\tau}{\sin\gamma}$ respectivement, et faisant la somme des produits

$$-\frac{dR}{d\gamma}\cos\tau+\frac{\sin\tau}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\tau}+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\sin\tau\left(\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{dR}{d\omega}\right)$$
$$=m'rr'\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin v\sin(v'-\tau)\sin\gamma,$$

équations dont les seconds membres, abstraction faite du

Digitized by Google

signe, sont précisément les valeurs de $\frac{dR}{dp}$, $\frac{dR}{dq}$; ainsi

$$\frac{dR}{dp} = -\frac{dR}{d\gamma}\sin\tau - \frac{\cos\tau}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\tau} - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\cos\tau\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}\right),$$

$$\frac{dR}{dq} = -\frac{dR}{d\gamma}\cos\tau + \frac{\sin\tau}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\tau} + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\sin\tau\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}\right).$$

Pour exprimer $\frac{dp}{dt}$, et $\frac{dq}{dt}$, on a donc

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\left[\frac{dR}{d\gamma}\cos\tau - \frac{\sin\tau}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\tau} - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\sin\tau\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}\right),\right.$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\left[\frac{dR}{d\gamma}\sin\tau + \frac{\cos\tau}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\tau} + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\cos\tau\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega}\right).\right.$$

Si l'on suppose maintenant que les longitudes soient comptées de la commune intersection des deux orbites, auquel cas on doit faire $\tau = 0$ dans les résultats précédents, on obtient

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\dfrac{dR}{d\gamma}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\left[\dfrac{1}{\sin\gamma}\dfrac{dR}{d\tau} + \operatorname{tang}\dfrac{1}{2}\gamma\left(\dfrac{dR}{d\varepsilon} + \dfrac{dR}{d\omega}\right)\right]. \end{cases}$$

Soit

$$1 - \cos\gamma = 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma = \eta;$$

d'où

$$\sin\gamma d\gamma = d\eta, \qquad \frac{dR}{d\gamma} = \sin\gamma\frac{dR}{d\eta},$$

et posons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = \frac{1 - \cos\gamma}{\sin\gamma};$$

Digitized by Google

on peut encore écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\sin\gamma\,\dfrac{dR}{d\eta}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\psi\sin\gamma}\left[\dfrac{dR}{d\tau} + \eta\left(\dfrac{dR}{d\varepsilon} + \dfrac{dR}{d\omega}\right)\right]. \end{cases}$$

C'est à cette forme remarquable des valeurs de p et de q que nous nous arrêterons. Nous prendrons donc au lieu du système d'équations (1), le suivant :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = 2a\mathfrak{N}\,\dfrac{dR}{d\varepsilon}, \qquad \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\mathfrak{N}}{\operatorname{tang}\psi}\,\dfrac{dR}{de}, \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \mathfrak{N}\cos\psi\operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2}\,\dfrac{dR}{de} - 2a\mathfrak{N}\,\dfrac{dR}{da}, \\ \dfrac{de}{dt} = -\mathfrak{N}\cos\psi\operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2}\,\dfrac{dR}{d\varepsilon} - \dfrac{\mathfrak{N}}{\operatorname{tang}\psi}\,\dfrac{dR}{d\omega}, \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\psi}\sin\gamma\,\dfrac{dR}{d\eta}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\mathfrak{N}}{\cos\psi\sin\gamma}\left[\dfrac{dR}{d\tau} + \eta\left(\dfrac{dR}{d\varepsilon} + \dfrac{dR}{d\omega}\right)\right]. \end{cases}$$

II. — Variations finies des éléments des orbites planétaires

Les formules précédentes expriment les variations différentielles des éléments de l'orbite elliptique, au moyen des dérivées partielles de la fonction R prises par rapport à ces éléments, et multipliées par des coefficients indépendants du temps. Pour avoir les valeurs finies de ces variations, il suf-

Digitized by Google

fira donc de substituer dans leurs expressions, à la place de R, la partie périodique de son développement, et de différentier par rapport à a, e, ε... les termes de ce développement qui dépendent de l'argument que l'on a à considérer. Par l'intégration, on en conclura alors très simplement les valeurs finies de ces variations, et ajoutant ces valeurs finies aux éléments mêmes de l'orbite elliptique, on aura celles qui conviennent au mouvement troublé ou $a + \delta a$, $e + \delta e$ etc.,

Considérons, par exemple, la variation différentielle du demi-grand axe, définie par l'équation

$$\frac{da}{dt} = 2a\mathfrak{N}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

et soit

$$m'\mathfrak{P}\cos\mathfrak{T}$$

un terme quelconque du développement de R. Nous supposons ici pour abréger

$$\mathfrak{T} = (i'l' - il) - \lambda\omega - \lambda'\omega' - 2\lambda_1\tau.$$

Nous aurons

$$\frac{da}{dt} = -2a\mathfrak{N}\mathfrak{P}m'\sin\mathfrak{T},$$

d'où par l'intégration

$$(5) \qquad \delta a = -\frac{2m'\mathfrak{N}ai}{i'n' - in}\mathfrak{P}\cos\mathfrak{T}.$$

En procédant de la même manière à l'égard des autres variations différentielles, on trouverait pour les expressions

Digitized by Google

de leurs valeurs finies

$$(6)\begin{cases} \delta e = m'\mathfrak{N}\mathfrak{L}\cos\psi \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\frac{\lambda+i}{i'n'-in}\cos\mathfrak{T}, \\ d\varepsilon = m'\mathfrak{N}\left[\cos\psi\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\frac{d\mathfrak{L}}{de} - 2a^2\frac{d\mathfrak{L}}{da}\right]\frac{1}{i'n'-in}\sin\mathfrak{T}, \\ \delta\omega = m'\frac{\mathfrak{N}}{\operatorname{tang}\psi}\frac{d\mathfrak{L}}{de}\frac{1}{i'n'-in}\sin\mathfrak{T}, \\ \delta p = -m'\frac{\mathfrak{N}\sin\gamma}{\eta\cos\psi}\frac{d\mathfrak{L}}{d\eta}\frac{1}{i'n'-in}\sin\mathfrak{T}, \\ \delta q = -m'\frac{2\mathfrak{N}\mathfrak{L}}{\sin\gamma\cos\psi}\frac{\lambda_1+(i+\lambda)\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{i'n'-in}\cos\mathfrak{T}. \end{cases}$$

Relativement à la perturbation du moyen mouvement ρ, qui résulte, comme on sait, de la double intégration

$$\rho = -3\int\int \mathfrak{N}n\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}dt^2,$$

elle a pour expression

$$(7)\qquad \delta\rho = \frac{3m'n\mathfrak{N}\mathfrak{L}i}{[i'n'-in]^2}\sin\mathfrak{T}.$$

Les formules qui précèdent sont générales. Si au lieu de $m'\mathfrak{L}\cos\mathfrak{T}$, on prenait

$$\mathrm{R} = \frac{m'}{2a'}b^{(i)}\cos i(l'-l)$$
$$+\frac{m'}{2a'}\{-2ib^{(i)} - b^{(i)}_{\{1\}}\}\, e\cos[i(l'-l)+l-\omega]$$
$$+\frac{m'}{2a'}\{(2i-1)b^{(i+1)} + b^{(i-1)}_{\{1\}}\}\, e'\cos[i(l'-l)+l-\omega'],$$

Digitized by Google

on aurait pour la variation du demi-grand axe a, par exemple,

$$\delta a = -m'\alpha\mathfrak{N}\frac{i}{n'-n}b^{(i)}\cos i(l'-l)$$
$$+m'\alpha\mathfrak{N}\frac{(i-1)}{i(n'-n)+n}\{2ib^{(i)}+b^{(i)}_{\{1\}}\}e\cos i[(l'-l)+l-\omega]$$
$$-m'\alpha\mathfrak{N}\frac{(i-1)}{i(n'-n)+n}\{(2i-1)b^{(i-1)}+b^{(i)}_{\{1\}}\}e'\cos[i(l'-l)+l'-\omega].$$

Les variations des autres éléments s'obtiendraient de la même manière. On a donc, par l'emploi des formules qui précèdent, un moyen fort simple de déterminer toutes les inégalités périodiques d'une planète, à quelque ordre qu'elles puissent appartenir relativement aux excentricités et aux inclinaisons.

III. — Variations périodiques et totales des coordonnées héliocentriques

Les variations finies des éléments elliptiques de m étant déterminées, il nous reste à montrer comment on peut en déduire celles des coordonnées héliocentriques r, v et s, qui fixent à chaque instant la position de la planète dans l'espace.

Il ne s'agira évidemment pour cela que d'introduire dans les formules du mouvement elliptique à la place de a, ρ, e, ε, ω, les valeurs de ces éléments corrigées de leurs variations périodiques ou $a+\delta a$, $\delta+\delta\rho$, etc.

Or, en considérant d'abord r et v et posant

$$\zeta = l - \omega,$$

Digitized by Google

on a

$$(1)\begin{cases} v = l + a_1 \sin\zeta + a_2 \sin 2\zeta + a_3 \sin 3\zeta + \ldots \\ r = a\,(b_0 + b_1 \cos\zeta + b_2 \cos 2\zeta + b_3 \cos 3\zeta +)\ldots ; \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en négligeant les carrés des masses perturbatrices,

$$(2)\begin{cases} \delta v = \delta\varepsilon + \delta\rho \\ \quad + \left\{\dfrac{da_1}{de}\sin\zeta + \dfrac{da_2}{de}\sin 2\zeta + \dfrac{da_3}{de}\sin 3\zeta + \ldots\right\}\delta e \\ \quad + \{a_1 \cos\zeta + 2a_2 \cos 2\zeta + 3a_3 \cos 3\zeta + \ldots\}\,\delta\varepsilon + \delta\rho - \delta\omega, \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \delta r = \{b_0 + b_1 \cos\zeta + b_2 \cos 2\zeta + b_3 \cos 3\zeta + \ldots\}\,\delta a \\ \quad + \{b_1 \sin\zeta + 2b_2 \sin 2\zeta + 3b_3 \sin 3\zeta + \ldots\}\,a\,(\delta\varepsilon + \delta\rho - \delta\omega) \\ \quad + \left\{\dfrac{db_0}{de} + \dfrac{db_1}{de}\cos\zeta + \dfrac{db_2}{de}\cos 2\zeta + \dfrac{db_3}{de}\cos 3\zeta + \ldots\right\} a\,\delta e. \end{cases}$$

Les valeurs des coefficients $a_1, a_2, a_3 \ldots$, b_0, b_1, $b_2 \ldots$ ont été données au chapitre IV du livre I. En les substituant ainsi que leurs dérivées dans les formules précédentes (2) et (3), on aura donc très simplement les variations périodiques δv et δr, lorsque celles δa, δe, $\delta\varepsilon$, $\delta\rho$ et $\delta\omega$ auront été déterminées par l'emploi des formules du paragraphe qui précède (*a*).

(*a*) En se bornant, par exemple, aux termes en e^3, on a par les formules (26) et (27) des pages 96 et 97.

$$a_1 = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \ldots \qquad b_0 = 1 + \frac{1}{2}e^2,\ b_1 = -e + \frac{3}{8}e^3 - \ldots$$

$$a_2 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \ldots \qquad b_2 = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^4 - \ldots$$

$$a_3 = \frac{13}{12}e^3 - \ldots \qquad b_3 = -\frac{3}{8}e^3 - \ldots,$$

Digitized by Google

Il nous reste à déterminer δs ou la variation de la latitude héliocentrique.

Soient, à cet effet,

ι le rayon vecteur de m projeté sur le plan fixe des xy ;

v l'angle que fait cette projection avec l'axe des x ;

s la tangente de la latitude de m au-dessus du même plan ;

φ son inclinaison ;

θ la longitude de son nœud ascendant comptée sur ce plan.

On aura aux quantités près du second ordre par rapport aux inclinaisons

$$x = \iota \cos v, \qquad y = \iota \sin v, \qquad z = \iota s,$$

$$z = \operatorname{tang} \varphi \cos \theta y - \operatorname{tang} \varphi \sin \theta x = qy - px,$$

et par la différentiation relative à δ, on déduira des deux

d'ou

$$\frac{da_1}{de} = 2 - \frac{3}{4} e^2 + \ldots \qquad \frac{db_0}{de} = e, \qquad \frac{db_1}{de} = -1 + \frac{9}{8} e^2 + \ldots$$

$$\frac{da_2}{de} = \frac{5}{2} e - \frac{11}{6} e^3 + \ldots \qquad \frac{db_2}{de} = -e + \frac{4}{3} e^3 - \ldots$$

$$\frac{da_3}{de} = \frac{13}{4} e^2 - \ldots \qquad \frac{db_3}{de} = -\frac{9}{8} e^2 + \ldots ;$$

on a par suite

$$\begin{aligned}
\delta v = {} & \delta l \\
& + \left\{ 2 - \frac{3}{4} e^2 \sin \zeta + \frac{5}{2} e \sin 2\zeta + \frac{13}{4} e^2 \sin 3\zeta \right\} \delta e \\
& + \left\{ \left(2e - \frac{1}{4} e^3 \right) \cos \zeta + \frac{5}{2} e^2 \cos 2\zeta + \frac{13}{4} e^3 \cos 3\zeta \right\} \delta \varepsilon + \delta \rho - \delta \omega \\
\delta r = {} & \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} - e \cos \zeta - \frac{e^2}{2} \cos 2\zeta \right. \delta a \\
& + \left\{ - \left(e - \frac{3}{8} e^3 \right) \sin \zeta - e^2 \sin^2 \zeta - \frac{9}{8} e^3 \sin 3\zeta \right) a \delta \zeta \\
& + \left\{ e - 1 + \frac{9}{8} e^2 \cos \zeta - e \cos 2\zeta - \frac{9}{8} e^2 \cos 3\zeta \right) a \delta e.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

dernières relations

$$\delta z = \iota\delta s + s\delta\iota, \quad \delta z = y\delta q - x\delta p + q\delta y - p\delta x,$$

c'est-à-dire

$$\iota\delta s + s\delta\iota = y\delta q - x\delta p + q\delta y - p\delta x.$$

Supposons, comme nous l'avons fait précédemment, que l'on prenne pour plan fixe le plan de l'orbite de m à une époque déterminée : alors z, p et q seront de l'ordre des masses perturbatrices et, en négligeant le carré de ces masses, on pourra écrire simplement

$$\iota\delta s = y\delta q - x\delta p.$$

Mais les termes qui proviennent de la latitude étant de l'ordre du produit des excentricités par les inclinaisons, quantités évidemment fort petites, on peut, dans le calcul de δs, faire abstraction de l'excentricité de l'orbite, c'est-à-dire supposer cette orbite circulaire, ce qui donne

$$\iota = a. \quad x = a \cos l, \quad y = a \sin l.$$

Dès lors, on a pour calculer δs en fonction des variations δq et δp dont nous avons développé précédemment les expressions

$$(4) \qquad \delta s = \sin l\delta q - \cos l\delta p.$$

Les formules (2), (3) et (4) que nous venons d'établir sont générales ; elles expriment les variations périodiques des trois coordonnées r, v, s en fonction des variations δa, δe, $\delta\rho$, $\delta\varepsilon$, δp et δq des éléments de l'orbite elliptique, et peuvent ainsi

Digitized by Google

servir au calcul de toutes les *inégalités périodiques* que l'action perturbatrice d'une planète quelconque m' introduit dans le mouvement d'une autre planète m. En les ajoutant aux valeurs de r_s, v_s, s_s calculées dans l'orbite elliptique, mais dont les éléments a_s, e_s, ρ_s, ont été préalablement corrigés de leurs *variations séculaires*, on aura les *variations totales* de ces éléments, ou la somme de tous les effets dus à l'action des forces perturbatrices. En désignant par $[r]$, $[v]$, $[s]$ ces valeurs complètes, on aura donc

$$[r] = r_s + \delta r, \qquad [v] = v_s + \delta v, \qquad [s] = s_s + \delta s.$$

Digitized by Google

CHAPITRE V

Théorie des inégalités à longues périodes

I — Commensurabilité approchée des moyens mouvements

Considérons un terme quelconque

$$(a) \qquad \mathfrak{P} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i'n't - int + \mathfrak{A})$$

du développement de R. La variation différentielle d'un élément α de l'orbite elliptique sera représentée, en général, par l'expression.

$$d\alpha = m'\mathfrak{P}'in \sin (i'n't - int + \mathfrak{A})\, dt,$$

($\mathfrak{P}'$ étant un coefficient de même nature que $\mathfrak{P}$), et l'on aura pour la variation finie de cet élément

$$\int d\alpha = \frac{m'\mathfrak{P}'in}{i'n' - in} \cos (i'n't - int + \mathfrak{A}).$$

Or, comme l'intégration fait passer en diviseur la quantité $i'n' - in$, on voit que les termes de la forme (a), quoique généralement forts petits, presque insensibles lorsqu'on s'élève aux carrés et aux puissances supérieures des excentricités et des

Digitized by Google

inclinaisons, pourront cependant, après leur substitution dans les expressions différentielles des éléments elliptiques et leur intégration, acquérir des valeurs considérables et prendre des périodes dont l'amplitude dépendra, en général, du rapport de commensurabilité qui existe entre les moyens mouvements $n't$ et nt. Si ces moyens mouvements s'éloignent beaucoup d'être commensurables entre eux ou si la différence $i'n' - in$ est très grande, l'argument prendra des accroissements rapides, la période de l'inégalité sera de peu de durée et sa grandeur dépendra uniquement de l'ordre auquel elle appartient relativement aux excentricités et aux inclinaisons. Si, au contraire, $i'n' - in$ est une très petite quantité, ce qui arrivera toutes les fois qu'un rapport de commensurabilité existera entre les moyens mouvements $n't$ et nt, l'argument du terme dont il s'agit sera très petit, son accroissement fort lent, et l'inégalité correspondante aura une durée très longue. On a donné à ces inégalités le nom d'*inégalités à longues périodes ;* et l'on peut voir chapitre III, livre II, toutes choses égales d'ailleurs, que les plus considérables seront d'abord celles du moyen mouvement ρ, à raison du très petit diviseur $(i'n' - in)^2$ que la double intégration introduit dans la variation finie de cet élément, et ensuite celles qui proviennent de l'excentricité et de la longitude du périhélie, à cause des termes $\frac{dR}{ed\omega}dt$ et $\frac{dR}{ede}dt$ que leurs expressions renferment, termes qui ayant l'excentricité e en diviseur, abaissent respectivement d'une unité et de deux unités l'ordre de chaque terme de R. C'est aux inégalités de cette espèce qu'on doit attribuer les grandes irrégularités observées dans le mouvement des planètes Jupiter et Saturne, irrégularités dont on avait vainement cherché

Digitized by Google

la cause avant Laplace. On reconnaît, en effet, en comparant les moyens mouvements nt et $n't$ de ces deux planètes, que l'excès de cinq fois le moyen mouvement de Saturne sur deux fois le moyen mouvement de Jupiter est à très peu près le $\frac{1}{74}$ de n, circonstance qui rend très petite la quantité $5n' - 2n$ et qui peut, par suite, rendre considérables les inégalités dépendantes de cet angle, bien que ces inégalités soient au moins du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. C'est ce que Laplace a reconnu le premier. Ce grand géomètre a prouvé en effet que le moyen mouvement de Saturne était soumis à une *grande inégalité* de 8896″ centésimales, dépendante de l'angle $5n' - 2n$ et dont la période est de neuf cent vingt-neuf ans environ ; qu'une inégalité correspondante et de même durée existait dans la théorie de Jupiter, et qu'enfin les coefficients de ces inégalités étaient de signes contraires, en sorte que le moyen mouvement de Jupiter s'accélère lorsque celui de Saturne se ralentit, et réciproquement. En 1790, ces moyens mouvements étaient égaux, mais depuis cette époque, c'est le mouvement de Jupiter qui se ralentit et celui de Saturne qui s'accélère.

II — Réduction des termes d'une inégalité a longue période relative a un argument déterminé

Supposons que les différents termes d'une inégalité à longue période dépendante d'un argument donne $i'n' - in$ soient

Digitized by Google

décomposés en sinus et en cosinus de cet angle, et mis sous la forme

$$(1) \qquad \sum M_{i'i} \cos (i'l' - il) + \sum N_{i'i} \sin (i'l' - il),$$

conformément à la notation du chapitre III, livre III.

Si l'on veut réduire les divers termes qui composent cette expression en un seul

$$(2) \qquad \mathfrak{P} \sin (i'l' - il + \mathfrak{A}),$$

il suffira de poser

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = \sqrt{M^2_{i'i} + N^2_{i'i}}, \\ \operatorname{tang} \mathfrak{A} = \dfrac{M_{i'i}}{N_{i'i}}, \end{cases}$$

$\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{A}$ étant, comme $M_{i'i}$ et $N_{i'i}$ dont ils dépendent, des fonctions des éléments des orbites.

Car, si l'on développe l'expression (2) et qu'on compare ensuite les coefficients de $\cos (i'l' - il)$ et de $\sin (i'l' - il)$ avec ceux semblables de la somme (1), il est clair qu'on aura

$$(4) \qquad M_{i'i} = \mathfrak{P} \sin \mathfrak{A}, \qquad N_{i'i} = \mathfrak{P} \cos \mathfrak{A},$$

relations qui renferment celles (3).

III. — Transformation des angles φ et θ

Dans le calcul des perturbations planétaires, on a souvent besoin de déduire, des valeurs de φ et de θ qui fixent la position de l'orbite de m par rapport à l'écliptique, celles γ et τ des

Digitized by Google

mêmes éléments rapportés au plan de l'orbite de m'. Soient pour cela fig 1.

Υ E l'écliptique;

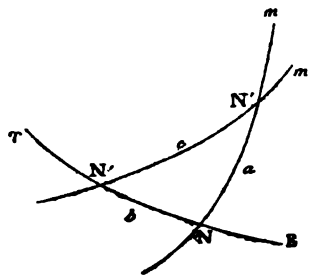
Nm l'orbite de m;

N'm' l'orbite de m';

N,N' les nœuds ascendants de ces orbites;

θ et θ' les longitudes ΥN et ΥN' des nœuds N et N';

Fig. 1.



φ et φ' les inclinaisons respectives des orbites de m et de m sur l'écliptique.

N'' sera le nœud ascendant de l'orbite de m par rapport à celle de m', et l'on aura

$$\tau = \Upsilon N + NN'',$$
$$\tau' = \Upsilon N' + N'N'',$$
$$\gamma = mN''m'.$$

Posons dans le triangle N'NN''

$$NN'' = a = \tau - \theta, \quad N'N = b = \theta - \theta', \quad N'N'' = c = \tau' - \theta'$$

et

$$A = \varphi', \quad B = \gamma, \quad C = 180 - \varphi;$$

Digitized by Google

alors par les formules connues

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin B \cos a = \sin C \cos A + \sin A \cos C \cos b,$$

on en déduira

$$\sin \gamma \sin (\tau - \theta) = \sin \varphi' \sin (\theta - \theta'),$$
$$\sin \gamma \cos (\tau - \theta) = \sin \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi' \cos \varphi \cos (\theta - \theta').$$

Maintenant si l'on développe dans les premiers membres de ces équations $\sin(\tau - \theta)$, $\cos(\tau - \theta)$, puis qu'on tire les valeurs de $\sin \gamma \sin \tau$ et de $\sin \gamma \cos \tau$, et qu'enfin on pose

$$p = \operatorname{tang} \varphi \sin \theta,$$
$$q = \operatorname{tang} \varphi \cos \theta,$$
$$p' = \operatorname{tang} \varphi' \sin \theta',$$
$$q' = \operatorname{tang} \varphi' \cos \theta',$$

on obtiendra, après quelques réductions faciles,

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{\cos\varphi \cos\varphi'} \sin\tau &= p - p' + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\operatorname{tang} \varphi'}{\cos \varphi} \sin(\theta - \theta') \cos \theta, \\ \frac{\sin \gamma}{\cos\varphi \cos\varphi'} \cos\tau &= q - q' - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\operatorname{tang} \varphi'}{\cos \varphi} \sin(\theta - \theta') \sin \theta. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où φ et φ' sont de très petits arcs, on peut écrire

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin \gamma \sin \tau &= p - p', \\ \sin \gamma \cos \tau &= q - q'. \end{aligned} \right.$$

Ces équations déterminent l'inclinaison mutuelle γ des orbites et la longitude τ du nœud ascendant de m sur m'. On obtiendrait celles qui font connaître la longitude τ' du nœud

Digitized by Google

ascendant de m' sur m, en changeant simplement dans les précédentes τ, p, q, φ, θ en τ', p', q', φ', θ' ou inversement, et remarquant que sin γ prend dans ce cas un signe contraire.

IV. — Relation qui lie entre elles les inégalités a longue période de deux planètes m et m' soumises a leur action mutuelle.

Les inégalités correspondantes des moyens mouvements de deux planètes m et m', soumises à leur action mutuelle, sont liées entre elles par une relation analogue à celle qui a lieu en général pour les inégalités séculaires, c'est-à-dire que l'on a, en ne considérant que les termes du premier ordre par rapport aux masses,

$$m\sqrt{a}\,\delta\rho + m'\sqrt{a'}\delta\rho' = 0.$$

Pour démontrer cette importante relation, soient :

x, y, z les coordonnées de la planète troublée ;
x', y', z', celles de la planète troublante ;
∂ et ∂' des différentielles prises respectivement par rapport aux coordonnées de m et de m' ;

et posons

$$\rho = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

On aura

$$R = m'\left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right],$$

$$R' = m\left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right],$$

Digitized by Google

d'où

$$\partial R = m'\left[\partial\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{x'dx + y'dy + z'dz}{r'^3}\right],$$

$$\partial' R = m\left[\partial'\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{xdx' + ydy' + zdz'}{r^3}\right].$$

Ajoutant membre à membre ces deux équations, après les avoir multipliées respectivement par

$$(M + m')m = \mu' m, \quad \text{et} \quad (M + m)m' = \mu m,$$

on trouvera

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mu' m \partial R + \mu m' \partial' R = \\ &= \mu' m m' \left[\partial\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{x'dx + y'dy + z'dz}{r'^3}\right] \\ &+ \mu m m' \left[\partial'\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{xdx' + ydy' + zdz'}{r^3}\right]. \end{aligned} \right.$$

Mais, d'après les formules du mouvement elliptique, on a

$$\frac{x}{r^3} = -\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{y}{r^3} = -\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{z}{r^3} = -\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\frac{x'}{r'^3} = -\frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{y'}{r'^3} = -\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \frac{z'}{r'^3} = -\frac{d^2z'}{dt^2};$$

substituant, on aura donc

$$m\partial R + m'\partial' R' = mm'd\left[\frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2} + \frac{1}{\rho}\right],$$

et en intégrant

$$(B) \quad m\int \partial R + m'\int \partial' R' = mm'\left[\frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2} + \frac{1}{\rho}\right].$$

Digitized by Google

Maintenant, si l'on se borne à considérer dans les deux membres de cette équation les termes qui, dépendant de l'argument $i'n't - int$ ont pour diviseur $i'n' - in$ (a), il est clair que le second membre de l'équation précédente ne renfermera aucun terme de cette espèce, tant que l'on n'aura égard qu'aux carrés et aux produits des masses m et m'. En ne considérant donc que les termes de cet ordre dans la valeur de (B), on aura à très peu près

$$m\int \partial R + m'\int \partial R' = 0,$$

et, par une seconde intégration, on en conclura

$$m\int dt\int \partial R + m'\int dt\int d'R' = man\delta\rho + m'a'n'\delta\rho' = 0,$$

c'est-à-dire, en mettant pour n et n' leurs valeurs $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{1}{a'^{\frac{3}{2}}}$,

$$m\sqrt{a}\delta\rho + m'\sqrt{a'}\delta\rho' = 0,$$

équation d'où l'on tire

$$\delta\rho' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\delta\rho.$$

Ainsi les inégalités $\delta\rho$ et $\delta\rho'$ dépendantes de la première

(a) Ces termes sont en effet les seuls qui puissent acquérir, par une seconde intégration, le carré de $i'n' - in$ dans les valeurs de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$, et, par là, devenir sensibles.

Digitized by Google

puissance des forces perturbatrices, sont entre elles dans le rapport de $m'\sqrt{a'}$ à $-m\sqrt{a}$. Lors donc qu'on aura calculé les inégalités de ρ qui ont $(i'n' - in)^2$ pour diviseur, on en conclura celles correspondantes de ρ' qui ont le même diviseur, en multipliant les premières par $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$.

Digitized by Google

CHAPITRE VI

Exemple du calcul numérique d'une inégalité à longue période

I. — Première opération. — Développement de la fonction R

La détermination des termes d'une inégalité à longue période repose sur une suite d'opérations numériques qui sont d'autant plus longues et compliquées que l'ordre de l'inégalité est plus élevé. Nous allons indiquer ici les principales de ces opérations en prenant pour exemple le cas de Concordia troublé par Jupiter, cas très remarquable à cause du rapport de commensurabilité approchée qui existe entre les moyens mouvements de ces corps. En comparant les valeurs de n et de n', on reconnait, en effet, que l'excès de huit fois le moyen mouvement de Jupiter, moins trois fois celui de Concordia est à fort peu près le $\frac{1}{52}$ de n', circonstance qui rend très petite la quantité $8n' - 3n$ (2110″ environ) et qui peut, par suite, rendre considérables les inégalités dépendantes de cet angle, surtout celles du moyen mouvement, à cause de la grandeur

Digitized by Google

du coefficient

$$\frac{n^2}{(8n' - 3n)^2}$$

qui affecte son expression.

Pour en déterminer les termes principaux, supposons que m se rapporte à Concordia, m' à Jupiter et soient a, e, ω, φ, θ, ε ; a', e', ω', φ', θ', ε', les autres éléments de leurs orbites elliptiques, ces quantités ayant la signification que nous leur connaissons. Appelons γ l'inclinaison mutuelle des orbites, laquelle, à l'époque que nous adoptons, a pour valeur 4°. 34′, 2″ (*a*); et soit τ la longitude du nœud de l'orbite de m rapportée au plan de l'orbite de m'. Posons en outre

$$l = nt + \varepsilon, \qquad l' = n't + \varepsilon'.$$

D'après les remarques que nous avons présentées, pages 182 et suivantes, on sait que les inégalités de l'espèce de celle que nous considérons sont au moins du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Nous aurons donc tout d'abord à développer, jusqu'aux termes de cet ordre, la fonction R qui exprime l'action réciproque des deux planètes (*b*). Or, en s'aidant pour cela des formules générales que l'on trouve au livre VI de la *Théorie analytique du système du*

(*a*) La petitesse de cette inclinaison, jointe à celle de l'excentricité de Concordia, permet d'appliquer ici au calcul de la fonction R, la méthode que nous avons développée au chapitre I du livre III. En effet, dans les limites où γ, e et e' sont donnés, la série qui représente R est rapidement convergente.

(*b*) Les termes suivants seraient de l'ordre $8l' - 3l + 2$, $8l' - 3l + 4$, etc., c'est-à-dire du septième, du neuvième ordre, etc. Nous ne considérons dans cette application que les termes de l'ordre le moins élevé parce que ce sont eux qui, dans l'expression du moyen mouvement, fournissent la partie principale de l'inégalité.

Digitized by Google

monde, il n'est pas difficile de voir qu'on aura dans le cas qui nous occupe

$$
\begin{aligned}
R = {} & M^{(0)} e^5 \cos(8l' - 3l - 5\omega) \\
& + M^{(1)} e^4 e' \cos(8l' - 3l - 4\omega - \omega') \\
& + M^{(2)} e^3 e'^2 \cos(8l' - 3l - 3\omega - 2\omega') \\
& + M^{(3)} e^2 e'^3 \cos(8l' - 3l - 2\omega - 3\omega') \\
& + M^{(4)} e e'^4 \cos(8l' - 3l - \omega - 4\omega') \\
& + M^{(5)} e'^5 \cos(8l' - 3l - 5\omega') \\
& + N^{(0)} e^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 3\omega - 2\tau) \\
& + N^{(1)} e^2 e'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 2\omega - \omega' - 2\tau) \\
& + N^{(2)} e e'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega - 2\omega' - 2\tau) \\
& + N^{(3)} e'^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 3\omega' - 2\tau) \\
& + N^{(4)} e \sin^4 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega - 4\tau) \\
& + N^{(5)} e' \sin^4 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega' - 4\tau).
\end{aligned}
$$

$M^{(0)}$, $M^{(1)}$..., et $N^{(0)}$, $N^{(1)}$... sont des coefficients fonctions des éléments des orbites; et, si après avoir posé

$$R = K \sin(8l' - 3l) + K' \cos(8l' - 3l)$$

on compare cette seconde forme de R avec la première, on en conclura, pour la variation du moyen mouvement de Concordia ou pour la valeur de $\delta\rho$,

$$\delta\rho = \frac{9am'n^2}{(8l' - 3l)^2} [K' \sin(8l' - 3l) - K \cos(8l - 3l)]$$

Digitized by Google

expression dans laquelle on a

$$a'm'\mathrm{K}' = \frac{m'}{3840}\,[129168\,b^{(8)} + 7006\,b^{(8)}_{[1]} + 14220\,b^{(8)}_{[2]} + 1350\,b^{(8)}_{[3]}$$
$$+ 60\,b^{(8)}_{[4]} + b^{(8)}_{[5]}]\,e^5 \cos 5\,\omega.$$
$$- \frac{m'}{768}\,[145215\,b^{(7)} + 78993\,b^{(7)}_{[1]} + 15858\,b^{(7)}_{[2]} + 1470\,b^{(7)}_{[3]}$$
$$+ 63\,b^{(7)}_{[4]} + b^{(7)}_{[5]}]\,e^4 e' \cos(4\omega + \omega')$$
$$+ \frac{m'}{384}\,[162408\,b^{(6)} + 88848\,b^{(6)}_{[1]} + 17754\,b^{(6)}_{[2]}$$
$$+ 1597\,b^{(6)}_{[3]} + 66\,b^{(6)}_{[4]} + b^{(6)}_{[5]}]\,e^3 e'^2 \cos(3\omega + 2\omega')$$
$$- \frac{m'}{384}\,[180150\,b^{(5)} + 99594\,b^{(5)}_{[1]} + 19607\,b^{(5)}_{[2]}$$
$$+ 1731\,b^{(5)}_{[3]} + 69\,b^{(5)}_{[4]} + b^{(5)}_{[5]}]\,e^2 e'^3 \cos(\omega + 4\omega')$$
$$+ \frac{m'}{768}\,[197184\,b^{(4)} + 111120\,b^{(4)}_{[1]} + 21728\,b^{(4)}_{[2]}$$
$$+ 1872\,b^{(4)}_{[3]} + 72\,b^{(4)}_{[4]} + b^{(4)}_{[5]}]\,ee'^4 \cos(\omega + 4\omega')$$
$$- \frac{m'}{3840}\,[210968\,b^{(3)} + 123240\,b^{(3)}_{[1]} + 24020\,b^{(3)}_{[2]}$$
$$+ 2020\,b^{(3)}_{[3]} + 75\,b^{(3)}_{[4]} + b^{(3)}_{[5]}]\,e'^5 \cos 5\,\omega'$$
$$- \frac{m'\alpha}{96}\,[1103\,c^{(7)} + 339\,c^{(7)}_{[1]} + 33\,c^{(7)}_{[2]} + c^{(7)}_{[3]}]\,e^3 \sin^2\frac{1}{2}\gamma \cos(3\omega + 2\tau)$$
$$+ \frac{m'\alpha}{32}\,[1488\,c^{(6)} + 433\,c_1^{(6)} + 38\,c^{(6)}_{[2]}$$
$$+ c^{(6)}_{[3]}]\,e^2 e' \sin^2\frac{1}{2}\gamma \cos(2\omega + \omega' + 2\tau)$$
$$- \frac{m'\alpha}{32}\,[2088\,c^{(5)} + 552\,c^{(5)}_{[1]} + 43\,c^{(5)}_{[2]}$$
$$+ c^{(5)}_{[3]}]\,ee' \sin^2\frac{1}{2}\gamma \cos(\omega + 2\omega' + 2\tau)$$
$$+ \frac{m'\alpha}{96}\,[3008\,c^{(4)} + 696\,c^{(4)}_{[1]} + 48\,c^{(4)}_{[2]} + c^{(4)}_{[3]}]\,e'^3 \sin^2\frac{1}{2}\gamma \cos(3\omega' + 2\tau)$$
$$- \frac{3m'\alpha^2}{16}\,[10\,e^{(6)} + e^{(6)}_{[1]}]\,e \sin^4\frac{1}{2}\gamma \cos(\omega + 4\tau)$$
$$+ \frac{3m'\alpha^2}{16}\,[17\,e^{(6)} + e^{(5)}_{[1]}]\,e' \sin^4\frac{1}{2}\gamma \cos(\omega' + 4\tau).$$

Digitized by Google

On obtiendrait une expression semblable pour $a'm'K$, mais dans laquelle les cosinus seraient remplacés par des sinus.

II. — Deuxième opération. — Calcul des quantités $b^{(i)}$, $e^{(i)}$, $c^{(i)}$ et de leurs dérivées

La réduction en nombres des expressions de $a'm'K'$ et de $a'm'K$ exige que l'on connaisse d'abord les valeurs numériques des quantités $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$ et de leurs dérivées. i est ici compris entre o et 8 pour $b^{(i)}$ et ses dérivées; entre o et 7 pour $c^{(i)}$ et ses dérivées et entre 5 et 6 pour $e^{(i)}$ et $e^{(i)}_{[1]}$.

En suivant la marche que nous avons indiquée au paragraphe III du chapitre II, et prenant $\alpha = 0{,}5190232$, ce qui suppose

$$a = 2.700374, \qquad a' = 5.202798,$$

on obtient les résultats suivants :

i	$b^{(i)}$	$b^{(i)}_{[1]}$	$b^{(i)}_{[2]}$	$b^{(i)}_{[3]}$	$b^{(i)}_{[4]}$	$b^{(i)}_{[5]}$
0	2.175248	0.382592	0.695927	1.418373	4.886528	21.30524
1	0.582491	0.737137	0.603703	1.544781	4.838756	21.69372
2	0.229762	0.527720	0.865194	1.508133	5.072619	21.85271
3	0.100052	0.33.498	0.850314	1.864913	5.215977	22.75349
4	0.045626	0.197266	0.695052	2.048834	5.988863	23.56074
5	0.021373	0.113928	0.512448	1.952738	6.759491	26.02948
6	0.010189	0.064555	0.353596	1.671312	7.059161	28.59313
7	0.004918	0.036097	0.233326	1.322485	6.645532	31.76985
8	0.002396	0.022238	0.148977	0.987079	5.834711	31.18750

i	$c^{(i)}$	$c^{(i)}_{[1]}$	$c^{(i)}_{[2]}$	$c^{(i)}_{[3]}$	$e^{(i)}$	$e^{(i)}_{[1]}$
0	4.003632	6.428376	21.07848	87.87080	»	»
1	2.815115	6.755295	20.36714	87.81594	»	»
2	1.759066	5.832454	19.94401	85.41839	»	»
3	1.044357	4.459008	18.29182	82.34706	»	»
4	0.602454	3.156870	15.46554	77.36035	»	»
5	0.341121	2.121746	12.25274	68.71771	2.402061	17.87391
6	0.190661	1.373584	9.16269	58.74700	1.513699	12.74584
7	0.105545	0.864820	6.58974	46.82979		

Digitized by Google

Supposons, par exemple, que l'on veuille vérifier les valeurs numériques de c^2 et c^3. En faisant $i = 2$ dans les formules (IV) du chap. II, livre III, on a

$$\frac{1}{2}(c^2 + c^3) = \frac{5}{(1-\alpha)^2}\frac{1}{2}(b^2 - b^3),$$

$$\frac{1}{2}(c^2 - c^3) = \frac{5}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{2}(b^2 + b^3);$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0{,}5190232 & \log\alpha &= 9.7151868\\
1-\alpha &= 0.4809768 & \log(1-\alpha) &= 9.6821242\\
1+\alpha &= 1.5190232 & \log(1+\alpha) &= 0.1815644\\
\log(1-\alpha)^2 &= 9.3642484 & \log(1+\alpha)^2 &= 0\ 3631288\\
b^2 &= 0.2297615 & b^3 &= 0.1000521\\
\frac{1}{2}(b^2 - b^3) &= 0{,}0648547 & \frac{1}{2}(b^2 + b^3) &= 0{,}1649068.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\log 5 &= 0.6989700 & \log 5 &= 0.6989700\\
\log(1-\alpha^2) &= 9.3642484 & \log(1+\alpha)^2 &= 0.3631288\\
\log\frac{5}{1-\alpha^2} &= 1.3347216 & \log\frac{5}{(1+\alpha^2)^2} &= 0.3358412\\
\log\frac{1}{2}(b^2 - b^3) &= 8.8119415 & \log\frac{1}{2}(b^2 + b^3) &= 9.2172386\\
\log\frac{1}{2}(c^2 + c^3) &= 0.1466631 & \log\frac{1}{2}(c^2 - c^3) &= 9.5530798\\
\frac{1}{2}(c^2 + c^3) &= 1.4017258 & \frac{1}{2}(c^2 - c^3) &= 0.3573384.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Les valeurs de c^2 et c^3 sont donc

$$c^2 = 1.759064, \qquad c^3 = 1.044387.$$

III. — Troisième opération — Calcul de τ et de γ — Evaluation numérique des coefficients $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{A}$

Nous adopterons pour les éléments elliptiques des deux planètes à l'époque 7, 0 janvier 1865, les valeurs suivantes :

Concordia	Jupiter
$n = 292032''.59$	$n' = 109256''.00$
$\omega = 189°.10'.5''$	$\omega' = 12°.9'.28''$
$e = 0,0425625$	$e' = 0,0482627$
$\theta = 161°.19°.50$	$\theta' = 99°.5'.23''$
$\varphi = 5°.1'.51''$	$\varphi' = 1°.18'.37''$.

Dès lors, nous aurons par l'emploi des formules (α) et (β) du chapitre V,

$\log \operatorname{tang} \varphi = 8.9446354$	$\log \operatorname{tang} \varphi' = 8.3593165$
$\log \sin \theta = 9.5052963$	$\log \sin \theta' = 9.9945117$
$\log \cos \theta = 9.9765247$ —	$\log \cos \theta' = 9.1986047$ —
$\log p = 8.4499317$	$\log p' = 8.3538282$
$\log q = 8.9211601$	$\log q' = 7,5179212$
$p = +\ 0.0281794$	$p' = +\ 0.0225854$
$q = -\ 0.0833988$	$q' = -\ 0.0036134$
$p - p' = +\ 0.005594$	$q - q' = -\ 0.0797854$

Digitized by Google

Nous aurons donc d'abord

$$\log 2 = 0{,}3010300 \qquad \log 2 = 0\ 3010300$$

$$\log \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 7.2846954 \qquad \log \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 7.2846954$$

$$\log \operatorname{tang} \varphi' = 8.3593165 \qquad \log \operatorname{tang} \varphi' = 8.3593165$$

$$\log \sin(\theta - \theta') = 9.9469007 \qquad \log \sin(\theta - \theta') = 9.9469007$$

$$\log \cos \theta = 9.9765247 - \qquad \log \sin \theta = 9.5052963$$

$$5.8684673 - \qquad 5.3972389$$

$$\log \cos \varphi = 9.9983241 \qquad \log \cos \varphi = 9.9983241$$

$$5.8701432 - \qquad 5.3989148$$

$$-0.00007416 \qquad +0.00002506$$

$$\frac{\sin \eta}{\cos\varphi\cos\varphi'} \sin\tau = +0.0055198, \quad \frac{\sin \eta}{\cos\varphi\cos\varphi'} \cos\tau = -0.0797603;$$

d'où

$$\tau = 176°.2'.29''.$$

Nous aurons ensuite

$$\sin \gamma = \frac{\cos \varphi \cos \varphi' \times 0.0055198}{\sin \tau}$$

$$\log \cos \varphi = 9.9983241$$

$$\log \cos \varphi' = 9{,}9998863$$

$$\log 0.0055198 = 7.7419233$$

$$7.7401337$$

$$\log \sin \tau = 8.8390746$$

$$\log \sin \gamma = 8.9010591,$$

d'où

$$\gamma = 4°.34'.2''.$$

Ainsi les valeurs de τ et γ sont :

$$\tau = 176°.2'.29''$$

$$\gamma = 4°.34'.2''.$$

Digitized by Google

Maintenant on a, en prenant $m' = \frac{1}{1050}$ et effectuant la réduction en secondes,

$$
\begin{aligned}
a'm'K' = {} & \bar{5}.6099052 \cos 5\,\omega \\
& - \bar{5}.9042964 \cos (4\omega + \omega') \\
& + \bar{7}.1895661 \cos (3\omega + 2\omega') \\
& - \bar{7}.4819416 \cos (2\omega + 3\omega') \\
& - \bar{7}.4729955 \cos (\omega + 4\omega') \\
& - \bar{7}.0643160 \cos 5\omega \\
& - \bar{6}.2278212 \cos (3\omega + 2\tau) \\
& + \bar{7}.0399799 \cos (2\omega + \omega' + 2\tau) \\
& - \bar{7}.3798305 \cos (\omega + 2\omega' + 2\tau) \\
& + \bar{7}.2468543 \cos (3\omega' + 2\tau) \\
& - \bar{5}.5658626 \cos (\omega + 4\tau) \\
& + \bar{5}.9438143 \cos (\omega' + 4\tau).
\end{aligned}
$$

On a d'ailleurs

$$\log n = 5.4654617, \qquad \log n^2 = 10.9309234,$$
$$\log (8n' - 3n) = 3.3242825, \qquad \log (8n' - 3n)^2 = 6.6485650,$$

en sorte que

$$\log \frac{9\,\alpha n^2}{(8n' - 3n)^2} = 4.9517677\ ;$$

et si à ces nombres on associe les suivants :

$$\log \cos 5\omega = \bar{1}.8430214 - \qquad \log \sin 5\omega = \bar{1}.8557617 -$$
$$\log \cos (4\omega + \omega') = \bar{1}.8184208 + \qquad \log \sin (4\omega + \omega') = \bar{1}.8766563 +$$
$$\log \cos (3\omega + 2\omega') = \bar{1}.7910853 - \qquad \log \sin (3\omega + 2\omega') = \bar{1}.8954611 -$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

on obtient enfin pour la valeur numérique de l'inégalité $\delta\rho$ de Concordia, mise sous la forme d'un seul terme.

$$\delta\rho = 444'' \sin (8l' - 3l + 89^\circ.8'.31'').$$

Le rapport

$$\frac{360^\circ}{(8n' - 3n)}$$

assigne à cette inégalité une période dont la durée est de 224970 jours moyens ou 615,96 années juliennes.

Digitized by Google

LIVRE V

APPROXIMATIONS DES ORDRES SUPÉRIEURS
PERTURBATIONS DU SECOND ORDRE PAR RAPPORT AUX MASSES

CHAPITRE I

Développement de la fonction R ordonné suivant les puissances des masses

---

I. — Expression analytique des termes d'ordres supérieurs par rapport aux forces perturbatrices

Nous avons développé dans le livre IV les inégalités dépendantes de la première puissance des forces perturbatrices. Il nous reste à considérer maintenant les inégalités dépendantes de la seconde puissance de ces forces, inégalités qui sont surtout rendues sensibles par les très petits arguments que leurs expressions renferment en diviseur, et que l'intégration leur fait acquérir.

Les considérations à l'aide desquelles on passe des termes du premier ordre à ceux du second ordre, et généralement des termes de l'ordre $n - 1$ à ceux de l'ordre n, sont les suivantes :

Concevons chacun des éléments qui entrent dans la fonction R, comme décomposés en deux parties : l'une constante à l'époque que l'on considère, et l'autre variable et de l'ordre des forces perturbatrices. Alors les éléments de l'orbite trou-

Digitized by Google

blée au lieu d'être représentés, comme dans la première approximation, par a, e, ε, ω, p, q; a', e'..., q', pourront s'écrire

$$a + \delta a, \quad e + \delta e, \quad \varepsilon + \delta\varepsilon \ldots\ldots \quad q + \delta q,$$
$$a' + \delta a', \quad e' + \delta e', \quad \varepsilon' + \delta\varepsilon' \ldots\ldots \quad q' + \delta q',$$

et δa, δe... $\delta a'$, $\delta e'$... exprimeront ici les seules variables de la question.

Or, si l'on fait la substitution des valeurs ci-dessus dans R, puis qu'on développe suivant les puissances et les produits des quantités δa, δe,... $\delta a'$, $\delta e'$.. cette fonction deviendra

$$R_n = R + \delta R + \delta^2 R + \delta^3 R + \ldots \text{ etc.};$$

et comme R est déjà du premier ordre par rapport aux masses, on voit que le développement général de R_n ordonné suivant les puissances des masses, se composera des termes suivants:

Termes du deuxième ordre par rapport aux masses.

$$\delta R = \frac{dR}{da}\delta a + \frac{\delta R}{de}\delta e + \frac{\delta R}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \ldots\ldots + \frac{\delta R}{dq}\delta q$$
$$+ \frac{dR}{da'}\delta a' + \frac{dR}{de'}\delta e' + \frac{dR}{d\varepsilon'}\delta\varepsilon' + \ldots\ldots + \frac{dR}{dq'}\delta q_{,}.$$

Termes du troisième ordre par rapport aux masses

$$\delta^2 R = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2R}{da^2}\delta a^2 + 2\frac{d^2R}{dade}\delta a\delta e + 2\frac{d^2R}{dad\varepsilon}\delta a\delta\varepsilon + \ldots\right.$$
$$\left.\frac{d^2R}{da'^2}\delta a'^2 + 2\frac{d^2R}{da'de'}\delta a'\delta e' + 2\frac{d^2R}{da'd\varepsilon'}\delta a'\delta\varepsilon' + \ldots\right\}$$

Termes du quatrième ordre par rapport aux masses.

$$\delta^3 R = \frac{1}{6}\left\{\frac{d^3R}{da^3}\delta a^3 + 3\frac{d^3R}{dade^2}\delta a\delta e^2 + \ldots + \frac{d^3R}{da'^3}\delta a'^3 + \ldots\right\};$$

Digitized by Google

et ainsi de suite pour les termes des ordres suivants. En substituant donc dans R_n à la place de δa, δe.. $\delta a'$, $\delta e'$... leurs valeurs, à mesure qu'elles seront fournies par les approximations successives, on obtiendra la valeur exacte de cette fonction, jusqu'à tel ordre de termes que l'on aura voulu considérer.

II. — Autre forme du développement de R ordonné suivant les puissances des masses

Dans ce qui précède, nous avons regardé R comme une fonction des éléments des orbites de m et de m'. Mais on peut aussi faire dépendre cette quantité des coordonnées héliocentriques de la planète troublée et de la planète troublante, et développer suivant les produits et les puissances des très petits accroissements que prennent ces coordonnées en vertu des forces perturbatrices.

Si donc l'on représente par

r, v, s le rayon vecteur, la longitude et la latitude de m dans son mouvement elliptique;

r', v', s' les mêmes éléments relatifs à m';

δr, δv, δs; $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$ les parties de ces coordonnées dues à l'action de m et de m', on aura :

Termes du deuxième ordre

$$\delta R = \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v + \frac{dR}{ds}\delta s + \frac{dR}{dr'}\delta r' + \frac{dR}{dv'}\delta v' + \frac{dR}{ds'}\delta s'$$

Digitized by Google

Termes du troisième ordre.

$$\delta^2 R = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2R}{dr^2}\delta r + 2\frac{d^2R}{drdv}\delta r\delta v + \ldots\ldots\ldots\ldots\right\};$$

et ainsi de suite.

Il reste à déterminer les valeurs des dérivées $\frac{dR}{dr}, \frac{dR}{dv} \ldots \frac{d^2R}{dr^2}$, etc. qui figurent dans ces expressions. Or si, en ne considérant que les termes du second ordre, on pose

$$r = a\,(1+\mu),$$

d'où

$$dr = da\,(1+\mu),$$

on aura

$$dRdr = dRda\,(1+\mu),$$

et par suite il viendra, en remettant pour $(1+\mu)$ sa valeur $\frac{r}{a}$,

$$r\frac{dR}{dr} = a\frac{dR}{da}.$$

Quant à l'expression de $\frac{dR}{dv}$, on a généralement, comme on l'a vu page 259,

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{ndt} + \frac{dR}{d\omega}.$$

Enfin, si l'on désigne par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de m rapportées au centre du Soleil, on a, aux quantités près de l'ordre que nous considérons,

$$r\frac{dR}{dz} = \frac{dR}{dz}.$$

Digitized by Google

On formerait de la même manière les valeurs de $\frac{dR}{dr'}, \frac{dR}{dv'}, \frac{dR}{ds'}$, relatives à m', et, par de simples différentiations, on en conclurait celles des dérivées des ordres supérieurs.

III. — Variations finies des éléments de l'orbite éllipti que en ayant égard au carré des forces perturbatrices

Considérons en particulier la variation du grand axe de l'orbite de m, laquelle, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, est représentée par l'expression

$$da = 2a^2 n \frac{dR}{d\varepsilon} dt.$$

Si dans une troisième approximation, on veut tenir compte des termes qui sont du second ordre par rapport aux masses, il faudra, conformément à ce que nous venons de dire, remplacer a par $a + \delta a$ et R par $R + \delta R$; et l'on aura ainsi

$$da = 2\,(a + \delta a)^2 \left[\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{d\delta R}{d\varepsilon}\right] n dt,$$

ou en posant $\frac{dR}{d\varepsilon} dt = \frac{1}{n} \partial R$, ∂ désignant une différentielle relative au temps, prise en ne faisant varier t qu'autant qu'il est multiplié par n

$$da = 2\,(a + \delta a)^2\,[\partial R + \partial \delta R].$$

Le développement de $(a + \delta a)^2$ au degré d'approximation

Digitized by Google

que nous considérons est $a^2 + 2a\delta a$, c'est-à-dire en remplaçant δa par sa valeur fournie par la première approximation

$$a^2 + 4a^3 \int \partial R.$$

Substituant puis intégrant, on aura donc

$$(a) \qquad \delta a = 2a^2 \partial R + 2a^2 \partial \delta R + 8a^3 \int [\partial R \int \partial R].$$

L'expression du moyen mouvement est

$$\rho = -3 \int\int an^2 \frac{dR}{d\varepsilon} dt^2,$$

ou

$$\rho = -3 \int\int andt\partial R;$$

et si pour avoir égard aux termes qui sont du second ordre par rapport aux masses, on change a en

$$a + \delta a = a + 2a^2 \int \partial R,$$

puis qu'on intègre, on trouvera

$$(b) \quad \delta\rho = -3an \int dt \int \partial\delta R + 3a^2 n \int dt \int [\partial R + \int \partial R].$$

Les variations finies des autres éléments s'obtiendraient de la même manière, mais les expressions en seraient nécessairement beaucoup plus compliquées. Cependant comme les termes du second ordre sont généralement peu considérables, et que ce n'est que par l'intégration qu'ils peuvent devenir

Digitized by Google

sensibles, on peut, le plus souvent, dans la détermination de ces termes, s'en tenir à ceux que fournissent les expressions de $\delta\rho$ et $\delta\rho'$, expressions qui sont en effet les seules qui puissent renfermer en diviseur les plus hautes puissances de l'argument $i'n' - in$.

Quant aux perturbations des coordonnées héliocentriques r, v, s, qui dépendent du second ordre, on les déduira aisément de celles des éléments elliptiques appartenant au même ordre, en employant pour cela les formules (2), (3) et (4) que nous avons développées au chapitre IV du livre IV.

Digitized by Google

CHAPITRE II

De la grande inégalité de Jupiter et de Saturne — Détermination des termes de la grande inégalité qui sont du second ordre par rapport aux masses.

I. — Combinaisons des divers arguments dans lesquels peut se décomposer l'angle $5n' - 2n$.

Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à la détermination analytique des termes du second ordre qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$ de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, termes qui sont surtout sensibles dans les valeurs de $\delta\rho$ et $\delta\rho'$, a cause du très petit diviseur $(5n' - 2n)^2$ que l'intégration leur fait acquérir.

Dans ce calcul, nous pourrons regarder R soit comme une fonction donnée des coordonnées r, v, s, r', v', s' de la planète troublée et de la planète perturbatrice, soit comme une quantité dépendante des éléments elliptiques a, e, ε,.. a', e', ε' de ces corps. Si dans le premier cas on pose

$$\delta R = \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v + \frac{dR}{ds}\delta s + \frac{dR}{dr'}\delta r' + \frac{dR}{dv'}\delta v' + \frac{dR}{ds'}\delta s',$$

$$\delta R' = \frac{dR'}{dr}\delta r + \frac{dR'}{dv}\delta v + \frac{dR'}{ds}\delta s + \frac{dR'}{dr'}\delta r' + \frac{dR'}{dv'}\delta v' + \frac{dR'}{ds'}\delta s',$$

Digitized by Google

il est clair qu'il faudra, pour obtenir les inégalités dont nous parlons, combiner entre eux les différents termes des facteurs $\frac{dR}{dr}$ et δr, $\frac{dR'}{dr}$ et dr etc. qui composent les expressions de δR et $\delta R'$, de manière que la somme ou la différence des arguments dont ils dépendent soit toujours égale à $5n' - 2n$; il faudra de plus que la somme des exposants des excentricités et des inclinaisons, dans les termes considérés, ne surpassent pas trois. Or, si l'on désigne par βt et $\beta' t$ respectivement, les arguments des termes de la fonction perturbatrice et des inégalités δr, δv, etc, il n'est pas difficile de voir que les combinaisons de β et β' qui satisferont aux conditions énoncées seront les suivantes :

Combinaisons résultant de l'addition des arguments β et β'

$\beta = 0,$	$\beta = n' - n,$	$\beta = 2n' - 2n,$
$\beta' = 5n' - 2n;$	$\beta' = 4n' - n;$	$\beta' = 3n;$
$\beta = n,$	$\beta = 2n' - n,$	$\beta = 3n' - 2n,$
$\beta' = 4n' - 2n;$	$\beta' = 3n' - n;$	$\beta' = 2n'.$

Combinaisons résultant de la soustraction des arguments β et β

$\beta = 6n' - 3n,$	$\beta = 6n' - 4n,$	$\beta = 6n' - 5n,$	$\beta = 6n' - 6n;$
$\beta' = n' - n;$	$\beta' = 2n' - 2n;$	$\beta' = n' - 3n;$	$\beta' = n' - 4n,$
$\beta = 7n' - 4n,$	$\beta = 7n' - 5n,$	$\beta = 7n' - 6n,$	$\beta = 7n' - 7n;$
$\beta' = 2n' - 2n;$	$\beta' = 2n' - 3n;$	$\beta' = 2n' - 4n;$	$\beta' = 2n' - 5n;$
.....	.....	.....	.....

Ces diverses combinaisons sont doubles parce qu'on peut y permuter entre elles les lettres β et β'. Relativement aux combinaisons qui satisfont à la condition $\beta - \beta' = 5n' - 2n$, comme le nombre en est illimité, on ne peut pas espérer d'avoir

Digitized by Google

toutes les inégalités qui en résultent et l'on doit se borner à calculer les plus considérables. En général, ce sont celles dont les arguments renferment les plus petits multiples des moyens mouvements nt et $n't$. Nous disons : en général, car il paraît bien difficile de discerner dans le nombre infini de ces inégalités, celles dont les valeurs sont sensibles et celles qui, au contraire, demeureront toujours inappréciables. Tout l'art du calculateur consiste à faire cette distinction et elle exige beaucoup de tact et d'habileté.

II. — Expressions analytiques des valeurs de $\delta\rho$ et $\delta\rho'$ qui résultent de la combinaison par voie d'addition des arguments βt et $\beta' t$.

Pour donner un exemple du calcul des termes du second ordre dont les arguments βt et $\beta' t$ satisfont à la condition $\beta + \beta' = 5n' - 2n$, nous considérerons le cas de $\beta = 0$ et $\beta' = 5n' - 2n$, et nous nous proposerons, en premier lieu, de déterminer les inégalités résultant de la combinaison des termes de R qui dépendent de l'argument o, avec ceux de δr et $\delta r'$ qui ont pour argument $5n't - 2nt$.

Les valeurs de ρ et de ρ' relatives à Jupiter et à Saturne et qui dépendent du carré de la force perturbatrice étant exprimées par

$$(A)\quad \begin{cases} \delta\rho = -3an\int dt\int \partial\delta R + 3a^2n\int dt\int\left[\partial R\int\partial R\right], \\ \delta\rho' = -3a'n'\int dt\int \partial'\delta R' + 3a'^2n'\int dt\int\left[\partial' R'\int\partial' R'\right], \end{cases}$$

on aura, en ne considérant d'abord que les premiers termes

Digitized by Google

de ces formules

$$\delta\rho = -3an\int dt\int\partial\left[\frac{d\mathrm{R}}{dr}\,\delta r + \ldots\ldots + \frac{d\mathrm{R}}{dr'}\,dr' + \ldots\ldots\right],$$

$$\delta\rho' = -3a'n'\int dt\int\partial'\left[\frac{d\mathrm{R}'}{dr}\,dr + \ldots\ldots + \frac{d\mathrm{R}'}{dr'}\,dr' + \ldots\ldots\right],$$

expressions dans lesquelles les caractéristiques ∂ et ∂' se rapportent aux coordonnées de m et de m' respectivement, et où a, n, a', n'... ont les significations que nous leur connaissons.

Or, si en n'ayant égard qu'à la partie non périodique de R on pose

$$\mathrm{R} = \frac{m'}{2}\,\mathrm{A}^{(0)}$$

dans le cas de Jupiter troublé par Saturne, et

$$\mathrm{R}' = \frac{m}{2}\,\mathrm{A}^{(0)}$$

dans celui de Saturne troublé par Jupiter, on aura

$$\delta\mathrm{R} = \frac{m'}{2}\left[\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\,\delta r + \frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\,\delta r'\right],$$

$$\delta\mathrm{R}' = \frac{m}{2}\left[\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\,\delta r + \frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\,\delta r'\right];$$

d'où en différentiant la première de ces valeurs par rapport à δr sans faire varier $\delta r'$, et la seconde par rapport à $\delta r'$ en y regardant δr comme constant

$$\frac{\partial\delta\mathrm{R}}{dt} = \frac{m'}{2}\,\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\,\frac{d\delta\mathrm{R}}{dt},$$

$$\frac{\partial'\delta\mathrm{R}'}{dt} = \frac{m}{2}\,\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\,\frac{d\delta\mathrm{R}}{dt}.$$

Digitized by Google

Soit $\Phi = 5l' - 2l$, et prenons pour les parties de δr et de $\delta r'$ qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$

$$\frac{\delta r}{a} = \mathrm{G}\cos(\Phi + g),$$

$$\frac{\delta r'}{a'} = \mathrm{G}'\cos(\Phi + g'),$$

d'où

$$\frac{d\delta r}{dt} = -a(5n' - 2n)\,\mathrm{G}\sin(\Phi + g),$$

$$\frac{d\delta r'}{dt} = -a'(5n' - 2n)\,\mathrm{G}'\sin(\Phi + g');$$

il en résultera

$$\frac{a\partial \mathrm{R}}{dt} = -\frac{m'}{2}aa'(5n' - 2n)\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\mathrm{G}\sin(\Phi + g),$$

$$\frac{a'\partial' \mathrm{R}'}{dt} = -\frac{m}{2}a'^2(5n' - 2n)\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\mathrm{G}'\sin(\Theta + g'),$$

et, par suite, on aura (*a*)

$$\delta\rho = -3an\int dt\,\frac{\partial\delta\mathrm{R}}{dt} = \mathrm{C}\frac{m'}{2}aa'(5n' - 2n)\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\mathrm{G}\sin(\Phi + g),$$

$$\delta\rho' = -3a'n'\int dt\,\frac{\partial'\delta\mathrm{R}'}{dt} = \mathrm{C}'\frac{m}{2}a'^2(5n' - 2n)\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\mathrm{G}'\sin(\Phi + g'),$$

avec

$$\mathrm{C} = -\frac{3mn'}{(5n' - 2n)^2},\quad \mathrm{C}' = -\frac{3\alpha n}{(5n' - 2n)^2},\quad \alpha = \frac{a'}{a}.$$

(*a*) Bien que multipliées par $5n' - 2n$, ces expressions de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$ n'en sont pas moins de l'ordre des termes que nous considérons ; car G et G' renfermant implicitement le diviseur $5n' - 2n$, les valeurs de C et de C' subsistent évidemment sans modification.

Digitized by Google

Combinaison inverse de la précédente

Proposons-nous actuellement de déterminer les valeurs de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$ qui se rapportent à la combinaison des termes de R dépendant de l'argument $5n' - 2n$, avec ceux de δr et de $\delta r'$ qui sont relatifs à l'argument zéro. Soient

$$R = m'N \sin\Phi + m'N' \cos\Phi,$$
$$R' = mN \sin\Phi + mN' \cos\Phi,$$

d'où

$$\delta R = m'\left(\frac{dN}{da}\delta r + \frac{dN}{da'}\delta r'\right)\sin\Phi + m'\left(\frac{dN'}{da}\delta r + \frac{dN}{da'}\delta r'\right)\cos\Phi,$$
$$\delta R' = m\left(\frac{dN}{da}\delta r + \frac{dN}{da'}\delta r'\right)\sin\Phi + m\left(\frac{dN'}{da}\delta r + \frac{dN}{da'}\delta r'\right)\cos\Phi.$$

En désignant par G et G' les parties constantes de $\frac{\delta r}{a}$ et $\frac{\delta r'}{a'}$,

et posant $\qquad \delta r = aG, \qquad \delta r' = a'G',$

on aura après avoir différentié les expressions précédentes de δR et de $\delta R'$, la première par rapport à nt en regardant $n't$ comme constant, et la seconde par rapport à $n't$ considéré comme seule variable.

$$\frac{a'\partial\delta R}{dt} = -2m'n\left(aa'\frac{dN}{da}G + a'^2\frac{dN}{da'}G'\right)\cos\Phi$$
$$+ 2m'n\left(aa'\frac{dN'}{da}G + a'^2\frac{dN}{da'}G'\right)\sin\Phi,$$
$$\frac{a'\partial'\delta R'}{dt} = 5mn'\left(aa'\frac{dN}{da}G + a'^2\frac{dN}{da'}G'\right)\cos\Phi$$
$$- 5mn\left(aa'\frac{dN'}{da}G + a'^2\frac{dN}{da'}G'\right)\sin\Phi,$$

Digitized by Google

expressions d'où l'on peut conclure, à cause de la relation très approchée $5n' = 2n$,

$$\frac{\partial\delta R'}{dt} = -\frac{m}{m'}\frac{n'}{n}\frac{\partial\delta R}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\delta\rho' = -\frac{m}{m'}\sqrt{\frac{a'}{a}}\,\delta\rho\,.$$

Quant à la valeur de $\delta\rho$ qu'il faut connaître pour déterminer $\delta\rho'$, elle est égale à

$$\delta\rho = C\,\frac{a'\partial\delta R}{dt},$$

C ayant pour valeur $-\dfrac{3\alpha n}{(5n' - 2n)^2}$.

Calcul des seconds termes des valeurs de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$.

Considérons maintenant les inégalités de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$ qui résultent du développement des termes

$$3a^2n\int dt\int[\partial R\int\partial R],$$

$$3a'^2n'\int dt\int[\partial' R'\int\partial' R'].$$

En posant comme précédemment

$$R = m'N\sin\Phi + m'N'\cos\Phi,$$

on aura

$$\frac{\partial R}{dt} = -2m'nN\cos\Phi + 2m'nN'\sin\Phi,$$

Digitized by Google

d'où

$$\int \partial R = -\frac{2m'n}{5n' - 2n}[N \sin \Phi + N' \cos \Phi] + m'K,$$

K étant une constante introduite par l'intégration.

On aura par suite en n'ayant égard qu'aux termes qui, dépendant de l'argument $5n't - 2nt$, sont seulement du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons,

$$\int dt \int [\partial R \int \partial R] = \frac{2m'^2 nK}{(5n - 2n)^2}[N \cos \Phi - N' \sin \Phi],$$

expression qu'il faudra multiplier par $3a^2n$, si l'on veut avoir la valeur correspondante du second terme de $\delta\rho$.

On obtiendrait de la même manière l'inégalité qui se rapporte au second terme de $\delta\rho'$, et joignant cette inégalité aux trois autres, on aurait les valeurs complètes de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$ relatives à la combinaison $\beta = 0$ et $\beta' = 5n' - 2n$ que nous venons de considérer.

Relativement aux autres combinaisons, on peut remarquer qu'il est inutile, dans le calcul des inégalités qui en résultent, d'avoir égard aux seconds termes des formules (A). Car, pour toutes les combinaisons dont l'un des arguments β ou β' ne renferme pas nt, on a $\partial R = 0$, et, par suite, $\partial R \int \partial R = 0$; et pour toutes celles dont les arguments dépendent de cet angle, il est aisé de vérifier que la double intégrale

$$\int dt \int [\partial R \int \partial R]$$

acquiert le diviseur $(5n - 2n)^2$ en même temps qu'elle acquiert le multiplicateur $5n' - 2n$. Dans le calcul des valeurs de $\delta\rho$

Digitized by Google

et de $\delta\rho'$ relatives à toutes les combinaisons autres que celles $\beta = 0$ et $\beta' = 5n' - 2n$, on pourra donc s'en tenir aux premiers termes de ces expressions, c'est-à-dire prendre

$$\delta\rho = -3an\int dt\int \partial\delta R, \quad \delta\rho' = -3a'n'\int dt\int \partial'\delta R'.$$

III. — Des inégalités du second ordre qui dépendent du double de l'argument de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne.

Les termes de l'ordre du carré des masses que nous venons de considérer dans l'expression du moyen mouvement, ne sont pas les seuls qui aient une influence marquée sur les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. Il existe encore dans les longitudes moyennes de ces planètes, des inégalités dépendantes de l'angle $2(5n't - 2nt)$, et qui, acquiérant par la double intégration le très petit diviseur $(5n' - 2n)^4$, peuvent par cette raison, devenir sensibles, bien qu'elles soient du sixième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et du second par rapport à la force perturbatrice. On conçoit en effet que, puisque l'expression de dv renferme des termes dépendants de l'angle $5n't - 2nt$ et ayant $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur, si l'on vient à combiner ces termes avec ceux de $\frac{dR}{dv}$ dépendants du même angle, il devra en résulter dans $\delta\rho$ des inégalités ayant en diviseur $(5n' - 2n)^4$. De semblables termes se rencontrent encore dans les variations des autres éléments, mais, là, le diviseur $5n' - 2n$ n'y est plus élevé

Digitized by Google

qu'à la troisième puissance. Relativement à la variation du moyen mouvement, on peut observer que le second terme de son expression fournit exclusivement des termes ayant $(5n' - 2n)^3$ pour diviseur. Car si l'on suppose

$$R = m'H \sin(\Phi + A),$$

d'où

$$\partial R = -2m'ndtH \cos(\Phi + A),$$

$$\int \partial R = -\frac{2m'n}{5n' - 2n} H \sin(\Phi + A),$$

on en conclut

$$\int [\partial R \int \partial R] = \frac{4m'^2n^2}{(5n' - 2n)^2} H^2 \cos 2(\Phi + A);$$

et il est évident que, dans cette expression, l'exposant du diviseur doit augmenter d'une unité lorsqu'on effectue la dernière intégration.

En général, les termes dont nous parlons sont peu sensibles surtout devant ceux affectés du diviseur $(5n' - 2n)^4$ et que fournit la première partie de l'expression de $\delta\rho$. Ils le deviennent cependant dans une circonstance remarquable ; c'est lorsque les excentricités de m et de m' sont très petites. Alors non seulement les seconds termes sont comparables aux premiers, mais il peut même se faire que les inégalités de l'excentricité et de la longitude du périhélie surpassent en grandeur celles du moyen mouvement. La théorie des satellites de Jupiter, dans le calcul des inégalités dépendantes de l'angle $nt - 3n't + 2n''t$, offre un exemple de ce cas remarquable.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Développement des inégalités du second ordre par la méthode de la variation des constantes arbitraires.

I. — Transformation des valeurs de δa, δe... δq.

Au lieu de regarder R comme une fonction donnée des six coordonnées polaires, r, v, s, r', v', s' de la planète troublée et de la planète perturbatrice, on peut, comme on l'a vu au chapitre I, faire dépendre cette quantité des éléments ou constantes arbitraires a, e, ω... et prendre, en conséquence, pour la variation de R qui est de l'ordre du carré des masses

$$\delta R = \frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{da'}\delta a' + \frac{dR}{de}\delta e + \frac{dR}{de'}\delta e' + \ldots + \frac{dR}{dq'}\delta q'.$$

Nous avons donné au chapitre IV du livre IV les valeurs de δa, δe,... δq qui entrent dans cette expression de δR ; mais pour les applications, il convient de transformer ces valeurs de manière à donner au terme $m'\mathfrak{P}\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\varpi$ qui les affecte, la forme

$$(a) \qquad N \sin(i'l' - il) + N' \cos(i'l' - il).$$

Considérons, par exemple, la variation du demi-grand axe

Digitized by Google

représentée, comme on sait, par l'expression

$$\delta a = -\frac{2m'\mathfrak{N}ai}{(i'n' - in)}\,\mathfrak{P}\cos\mathfrak{T}.$$

Si l'on veut que le terme

$$\mathfrak{P}\cos\mathfrak{T} = \mathfrak{P}\cos(i'l' - il - \lambda\omega - \lambda'\omega' - 2\lambda_1\tau)$$

prenne la forme proposée (a), il faudra supposer

$$N = \mathfrak{P}\sin(\lambda\omega + \lambda'\omega' + 2\lambda_1\tau), \quad N' = \mathfrak{P}\cos(\lambda\omega + \lambda\omega' + 2\lambda_1\tau);$$

et alors il viendra

$$\text{(A)} \quad \delta a = -\frac{2m'\mathfrak{N}ai}{i'n' - in}\,[N\sin(i'l' - il) + N'\cos(i'l' - il)].$$

La variation de l'excentricité, en négligeant e^2 vis-à-vis de l'unité, est

$$\delta e = \frac{m'\mathfrak{N}}{i'n' - in}\,\frac{\mathfrak{P}\lambda}{e}\cos(i'l' - il - \lambda\omega - \lambda'\omega' - 2\lambda_1\tau);$$

et comme en n'ayant égard qu'aux termes de l'ordre $i' - i$, le coefficient $\mathfrak{P}$ a cette forme-ci

$$Ke^{\lambda}e'^{\lambda'}\eta^{2\lambda_1},$$

on en conclut $\frac{d\mathfrak{P}}{de} = \frac{\mathfrak{P}\lambda}{e}$. Par suite, on a

$$\delta e = \frac{m'\mathfrak{N}}{i'n' - in}\,\frac{d\mathfrak{P}}{de}\cos(i'l' - il - \lambda\omega - \lambda'\omega' - 2\lambda_1\tau),$$

c'est-à-dire en comparant cette expression avec la somme (a)

$$\text{(B)} \quad \delta e = \frac{m'\mathfrak{N}}{i'n' - in}\left[\frac{dN}{de}\sin(i'l' - il) + \frac{dN'}{de}\cos(i'l' - il)\right].$$

Digitized by Google

Les expressions des autres variations s'obtiendraient par une analyse semblable et l'on trouverait pour $\delta\omega$, δp, δq, les valeurs suivantes qui nous seront utiles dans la suite :

$$(C)\left\{\begin{aligned} e\delta\omega &= \frac{m'\mathfrak{N}}{i'n'-in}\left[\frac{dN'}{de}\sin(i'l'-il)-\frac{dN}{de}\cos(i'l'-il)\right],\\ \delta p &= -\frac{m'\mathfrak{N}\sin\gamma}{\eta(i'n'-in)}\left[\frac{dN'}{d\eta}\sin(i'l'-il)-\frac{dN}{d\eta}\cos(i'l'-il)\right],\\ \delta q &= -\frac{m'\mathfrak{N}\eta}{\sin\gamma(i'n'-in)}\left[\frac{dN}{d\eta}\sin(i'l'-il)+\frac{dN'}{d\eta}\cos(i'l'-il)\right].\end{aligned}\right.$$

II. — Application des formules précédentes au calcul des termes du second ordre de l'inégalité $\delta\rho$.

Nous allons appliquer les formules qui précédent à la détermination des termes de la partie de $\delta\rho$ qui résulte de la combinaison des deux arguments $5n't-2nt$ et o, mais en tenant compte dans la partie non-périodique de R des termes dépendants des excentricités et des inclinaisons, termes que que nous avons négligés dans l'application que nous avons faite au § II du chapitre II.

Soit donc en n'ayant égard qu'aux quantités dont nous parlons,

$$(1)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{m'}{2}A^{(0)}+\frac{m'}{8}\mathfrak{U}(e^2+e'^2)\\ &+\frac{m'}{2}(ee'\mathfrak{U}'\cos(\omega'-\omega)-\frac{m'}{8}aa'B^{(1)}\gamma.\end{aligned}\right.$$

Alors $\mathfrak{U}$ relativement à m (nous ne nous occupons ici que de la partie de $\delta\mathfrak{U}$ qui doit être substituée dans $\delta\rho$) sera une fonction des quatre variables a, e, ω, γ, et l'on aura pour la

Digitized by Google

variation de cette fonction qui est de l'ordre du carré des forces perturbatrices

$$(2) \qquad \delta\mathfrak{U} = \frac{d\mathfrak{U}}{da}\delta a + \frac{d\mathfrak{U}}{de}\delta e + \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega}\delta\omega + \frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma}\delta\gamma.$$

Ainsi il s'agit de calculer δa, δe, $\delta\omega$, $\delta\gamma$, et $\frac{d\mathfrak{U}}{da}$, $\frac{d\mathfrak{U}}{de}$ etc. Or, en faisant dans les formules générales (A), (B), (C), $i' = 3$, $i = 2$ et posant $5l' - 2l = \Phi$, on en déduit :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta a &= -\frac{4m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}[a\mathrm{N}\sin\Phi + a\mathrm{N}'\cos\Phi], \\ \delta e &= \frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\left[\frac{d\mathrm{N}}{de}\sin\Phi + \frac{d\mathrm{N}'}{de}\cos\Phi\right], \\ e\delta\omega &= \frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\left[\frac{d\mathrm{N}'}{de}\sin\Phi - \frac{d\mathrm{N}}{de}\cos\Phi\right]. \end{aligned} \right.$$

En n'ayant égard qu'aux termes dont nous nous occupons, on peut faire $\eta = \gamma$, ce qui réduit les deux dernières formules (C) aux suivantes :

$$\delta p = -\frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\left[\frac{d\mathrm{N}'}{d\gamma}\sin\Phi - \frac{d\mathrm{N}}{d\gamma}\cos\Phi\right],$$

$$\delta q = -\frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\left[\frac{d\mathrm{N}}{d\gamma}\sin\Phi + \frac{d\mathrm{N}'}{d\gamma}\cos\Phi\right].$$

Ces valeurs substituées dans la relation (4) de la page 268, savoir :

$$\delta s = \delta q \sin(v - \tau) - \delta p \cos(v - \tau)$$

donnent

$$\delta s = -\frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\left[\frac{d\mathrm{N}}{d\gamma}\cos(\Phi - v + \tau) - \frac{d\mathrm{N}'}{d\gamma}\sin(\Phi - v + \tau)\right].$$

Digitized by Google

On a d'ailleurs en appelant s la latitude de m au-dessus de l'orbite primitive de m'

$$s = \gamma \sin(v - \tau),$$

d'où

$$\delta s = \delta\gamma \sin(v - \tau) - \gamma\delta\tau \cos(v - \tau).$$

Par la comparaison de ces deux valeurs de δs on a donc

$$(4) \qquad \delta\gamma = \frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\left[\frac{dN}{d\gamma}\sin\Phi + \frac{dN'}{d\gamma}\cos\Phi\right].$$

Maintenant si l'on substitue les valeurs (3) et (4) que nous venons de trouver dans l'expression de $\delta\mathfrak{U}$, on aura

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{U} = \frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\Big[& -4a\frac{d\mathfrak{U}}{da}N\sin\Phi && -4a\frac{d\mathfrak{U}}{da}N'\cos\Phi \\ & +\frac{d\mathfrak{U}}{de}\frac{dN}{de}\sin\Phi && +\frac{d\mathfrak{U}}{de}\frac{dN'}{de}\cos\Phi \\ & +\frac{d\mathfrak{U}}{ed\omega}\frac{dN'}{de}\sin\Phi && -\frac{d\mathfrak{U}}{ed\omega}\frac{dN}{de}\cos\Phi \\ & +\frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma}\frac{dN}{d\gamma}\sin\Phi && +\frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma}\frac{dN'}{d\gamma}\cos\Phi\ldots\Big].\end{aligned}$$

Mais de l'équation (1), on tire en la différentiant par rapport à chacune des variables a, e, ω et γ,

$$\frac{d\mathfrak{U}}{da} = \frac{m'}{2}\frac{dA^{(0)}}{da},$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{de} = \frac{m'}{4}e\mathfrak{U} + \frac{m'}{2}\mathfrak{U}'e'\cos(\omega' - \omega),$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{ed\omega} = \frac{m'}{2}e'\mathfrak{U}'\sin(\omega' - \omega),$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma} = -\frac{m'}{4}aa'B^{(1)}\gamma;$$

Digitized by Google

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} m'\mathrm{N} = {} & \mathrm{M}^{(0)}e'^3 \sin 3\omega' + \mathrm{M}^{(1)}ee'^2 \sin(2\omega' + \omega) \\ & + \mathrm{M}^{(2)}e'e^2 \sin(2\omega + \omega') + \mathrm{M}^{(3)}e^3 \sin(3\omega) \\ & + \mathrm{M}^{(4)}e'\gamma^2 \sin(2\tau + \omega') + \mathrm{M}^{(5)}e\gamma^2 \sin(2\tau + \omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'\mathrm{N}' = {} & \mathrm{M}^{(0)}e'^3 \cos 3\omega' + \mathrm{M}^{(1)}e'e^2 \cos(2\omega' + \omega) \\ & + \mathrm{M}^{(2)}e'e^2 \cos(2\omega + \omega') + \mathrm{M}^{(3)}e^3 \cos 3\omega \\ & + \mathrm{M}^{(4)}e'\gamma^2 \cos(2\tau + \omega') + \mathrm{M}^{(5)}e\gamma^2 \cos(2\tau + \omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'\frac{d\mathrm{N}}{de} = {} & \mathrm{M}^{(1)}e'^2 \sin(2\omega' + \omega) + 2\mathrm{M}^{(2)}ee' \sin(2\omega + \omega') \\ & + 3\mathrm{M}^{(3)}e^2 \sin 3\omega + \mathrm{M}^{(5)}\gamma^2 \sin(2\tau + \omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'\frac{d\mathrm{N}'}{de} = {} & \mathrm{M}^{(1)}e'^2 \cos(2\omega' + \omega) + 2\mathrm{M}^{(2)}ee' \cos(2\omega + \omega') \\ & + 3\mathrm{M}^{(3)}e^2 \cos 3\omega + \mathrm{M}^{(5)}\gamma^2 \cos(2\tau + \omega); \end{aligned}$$

et d'autre part

$$m'\frac{d\mathrm{N}}{d\gamma} = 2\mathrm{M}^{(4)}e'\gamma \sin(2\tau + \omega') + 2\mathrm{M}^{(5)}e\gamma \sin(2\tau + \omega)$$

$$m'\frac{d\mathrm{N}'}{d\gamma} = 2\mathrm{M}^{(4)}e\gamma \cos(2\tau + \omega') + 2\mathrm{M}^{(5)}e\gamma \cos(2\tau + \omega).$$

En convenant de représenter par $\delta\mathfrak{U}_1$ la partie de $\delta\mathfrak{U}$ qui est multipliée par $\sin\Phi$ et posant généralement $\frac{\mathrm{M}^{(l)}}{m'} = \mathcal{H}^{(l)}$, puis $\mathrm{Q} = -2a\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}$, on aura donc

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{U}_1 = \frac{m'\mathfrak{N}}{5n' - 2n}\Big[& m'\mathrm{Q}\mathcal{H}^{(0)}e'^3 \sin 3\omega' \\ & + \left\{\frac{m'}{4}\mathfrak{U}e + \frac{m'}{2}\mathfrak{U}'e'\cos(\omega' - \omega)\right\}\mathcal{H}^{(1)}e'^2 \sin(2\omega' + \omega) \\ & + \left\{\frac{m'}{2}e'\mathfrak{U}'\sin(\omega' - \omega)\right\}\mathcal{H}^{(1)}e'^2 \cos(\omega' + \omega) \\ & + m'\mathrm{Q}\mathcal{H}^{(1)}ee'^2 \sin(2\omega' + \omega) \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\frac{m'}{4}e\mathfrak{U}+\frac{m'}{2}\mathfrak{U}'e'\cos(\omega'-\omega)\right\}2\mathcal{H}^{(2)}ee'\sin(2\omega+\omega')\\
&+\left\{\frac{m'}{2}e'\mathfrak{U}'\sin(\omega'-\omega)\right\}2\mathcal{H}^{(2)}ee'\cos(2\omega+\omega')\\
&+m'Q\mathcal{H}^{(2)}e'e^2\sin(2\omega+\omega')\\
&+m'Q\mathcal{H}^{(3)}e^3\sin 3\omega\\
&+\left\{\frac{m'}{4}e\mathfrak{U}+\frac{m'}{2}\mathfrak{U}'e'\cos(\omega'-\omega)\right\}3\mathcal{H}^{(3)}e^2\sin 3\omega\\
&+\left\{\frac{m'}{2}e'\mathfrak{U}'\sin(\omega'-\omega)\right\}3\mathcal{H}^{(3)}e^2\cos 3\omega\\
&+m'Q\mathcal{H}^{(4)}e'\gamma^2\sin(2\tau-\omega')\\
&+\left\{\frac{m'}{4}e\mathfrak{U}+\frac{m'}{2}\mathfrak{U}e'\cos(\omega'-\omega)\right\}\mathcal{H}^{(3)}\gamma^2\sin(2\tau+\omega)\\
&+\left\{\frac{m'}{2}e'\mathfrak{U}'\sin(\omega'-\omega)\right\}\mathcal{H}^{(3)}\gamma^2\cos(2\tau+\omega)\\
&+\left\{\left(\frac{m'}{4}aa'B^{(1)}\gamma\right)2\mathcal{H}^{(4)}e'\gamma\sin(2\tau+\omega')\right.\\
&+m'Q\mathcal{H}^{(5)}e\gamma^2\sin(2\tau+\omega)\\
&\left.+\left(\frac{m'}{4}aa'B^{(1)}\gamma\right)2\mathcal{H}^{(5)}e\gamma\sin(2\tau+\omega)\right]\sin\Phi.
\end{aligned}
$$

Soient

$$\mathfrak{z}^{(0)}=m'Q\mathcal{H}^{(0)}+\frac{m'}{2}\mathfrak{U}'\mathcal{H}^{(1)},$$

$$\mathfrak{z}^{(1)}=m'Q\mathcal{H}^{(1)}+\frac{m'}{4}\mathfrak{U}\mathcal{H}^{(1)}+m'\mathfrak{U}\mathcal{H}^{(2)},$$

$$\mathfrak{z}^{(2)}=m'Q\mathcal{H}^{(2)}+\frac{m'}{2}\mathfrak{U}\mathcal{H}^{(2)}+\frac{3}{2}m'\mathfrak{U}'\mathcal{H}^{(3)},$$

$$\mathfrak{z}^{(3)}=m'Q\mathcal{H}^{(3)}+\frac{3}{4}m'\mathfrak{U}\mathcal{H}^{(3)},$$

$$\mathfrak{z}^{(4)}=m'Q\mathcal{H}^{(4)}-\frac{m'}{2}aa'B^{(1)}\mathcal{H}^{(4)}+\frac{m'}{2}\mathfrak{U}'\mathcal{H}^{(5)},$$

$$\mathfrak{z}^{(5)}=m'Q\mathcal{H}^{(5)}+\frac{m'}{4}\mathfrak{U}\mathcal{H}^{(5)}-\frac{m'}{2}aa'B^{(1)}\mathcal{H}^{(5)};$$

Digitized by Google

alors on pourra écrire

$$\delta\mathfrak{U}_1 = \frac{m'\mathcal{N}}{5n' - 2n}\,[e'^3\mathfrak{z}^{(0)} \sin 3\omega'$$
$$+ ee'^2\mathfrak{z}^{(1)} \sin(2\omega' + \omega)$$
$$+ e^2e'\mathfrak{z}^{(2)} \sin(2\omega + \omega')$$
$$+ e^3\mathfrak{z}^{(3)} \sin 3\omega$$
$$+ e'\gamma^2\mathfrak{z}^{(4)} \sin(2\tau + \omega')$$
$$+ e\gamma^2\mathfrak{z}^{(5)} \sin(2\tau + \omega)] \sin \Phi.$$

Quant à la partie de $\delta\mathfrak{U}$ qui se trouve multipliée par $\cos\Phi$, il n'est besoin d'aucun calcul pour la déterminer. L'inspection des valeurs de N', $\frac{dN}{de}$, $\frac{dN'}{de}$ etc., montre assez qu'il suffit de changer les sinus en cosinus dans l'expression de $\delta\mathfrak{U}_1$ pour avoir immédiatement celle qui correspond au multiplicateur $\cos\Phi$. En désignant par $\delta\mathfrak{U}_2$ cette partie, on aura donc

$$(\alpha) \qquad \delta\mathfrak{U} = \frac{m'\mathcal{N}}{5n' - 2n}\,[\delta\mathfrak{U}_1 \sin\Phi + \delta\mathfrak{U}_2 \cos\Phi].$$

et, par suite, il viendra pour le terme de $\delta\rho$ que nous considérons

$$\delta\rho = -\frac{3m'\mathcal{N}^2}{(5n' - 2n)^2}\,[\delta\mathfrak{U}_2 \sin\Phi - \delta\mathfrak{U}_1 \cos\Phi].$$

III. — Calcul de $\delta\rho'$

L'expression (α) que nous venons de déterminer constitue la partie de la variation totale $\delta\mathfrak{U}$ qui se rapporte aux variations des éléments a, e, ω et γ ; cette partie est multipliée par

Digitized by Google

la masse m' de Saturne. Si l'on voulait obtenir la partie de $\delta\mathfrak{U}$ qui doit être substituée dans l'expression de la double intégrale $-3a'n'\int dt\int\delta\mathfrak{U}'$, il faudrait évidemment considérer les termes qui complètent cette valeur de $\delta\mathfrak{U}$ et que nous avons omis, savoir :

$$\frac{d\mathfrak{U}}{da'}\delta a' + \frac{d\mathfrak{U}}{de'}\delta e' + \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega'}\delta\omega' ;$$

et comme d'une part

$$\delta a' = \frac{a'n}{an'}\frac{4m\mathfrak{N}'}{5n'-2n}[a\mathrm{N}\sin\Phi + a\mathrm{N}'\cos\Phi],$$

$$\delta e' = \frac{m\mathfrak{N}'}{5n'-2n}\left[\frac{d\mathrm{N}}{de'}\sin\Phi + \frac{d\mathrm{N}'}{de'}\cos\Phi\right],$$

$$e'\delta\omega' = \frac{m\mathfrak{N}'}{5n'-2n}\left[\frac{d\mathrm{N}'}{de'}\sin\Phi - \frac{d\mathrm{N}}{de}\cos\Phi\right],$$

$$m'\frac{d\mathrm{N}}{de'} = 3\mathrm{M}^{(0)}e'^2\sin 3\omega' + 2\mathrm{M}^{(1)}ee'\sin(2\omega'+\omega) + \text{etc.},$$

$$m'\frac{d\mathrm{N}'}{de'} = 3\mathrm{M}^{(0)}e'^2\cos 3\omega' + 2\mathrm{M}^{(1)}ee'\cos(2\omega'+\omega) + \text{etc.};$$

et d'autre part

$$\frac{d\mathfrak{U}}{da'} = \frac{m'}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'},$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{de'} = \frac{m'}{4}e'\mathfrak{U} + \frac{m'}{2}e\mathfrak{U}'\cos(\omega'-\omega),$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{e'd\omega'} = -\frac{m'}{2}e\mathfrak{U}'\sin(\omega'-\omega),$$

on en conclurait, en désignant par $\delta\mathfrak{U}'$ la partie de la varia-

Digitized by Google

tion de $\mathfrak{U}$ qui se rapporte aux termes dont nous parlons,

$$\delta\mathfrak{U}' = -\frac{m\mathfrak{N}'}{5n' - 2n}\,[\delta\mathfrak{U}'_2 \sin\Phi + \delta\mathfrak{U}'_1 \cos\Phi].$$

$\delta\mathfrak{U}'_1$ et $\delta\mathfrak{U}'_2$ sont des fonctions analogues à celles $\delta\mathfrak{U}_1$ et $\delta\mathfrak{U}_2$ et que l'on obtiendrait par un calcul entièrement semblable au précédent. On aurait donc ici

$$\delta\rho' = \frac{3m\mathfrak{N}'^2}{(5n' - 2n)^2}\,[\delta\mathfrak{U}'_2 \sin\Phi - \delta\mathfrak{U}'_1 \cos\Phi].$$

Digitized by Google

CHAPITRE IV

Des conditions qui assurent la stabilité du système du monde

I. — Invariabilité des grands axes des orbites planétaires en ayant égard au carré des forces perturbatrices

La stabilité du système du monde repose sur les deux conditions suivantes. Il faut 1° que les grands axes des orbites planétaires soient invariables, et 2° que les variations séculaires de leurs excentricités et de leurs inclinaisons soient toujours renfermées dans d'étroites limites.

En traitant des inégalités séculaires, nous avons déjà reconnu que le grand axe de l'orbite troublée restait invariable ou du moins que ses variations n'étaient que périodiques, tant que l'on n'avait pas égard aux puissances des masses supérieures à la seconde. Nous allons maintenant reprendre cette importante proposition, et l'étendre au cas où l'on considère les carrés et les produits des masses perturbatrices ; nous démontrerons ensuite que les excentricités et les inclinaisons ne sauraient croître indéfiniment, quelque loin que l'on pousse les approximations par rapport à ces quantités, même en ayant égard au carré des masses pertubatrices, ce qui achèvera de

Digitized by Google

compléter la démonstration que nous avons en vue touchant le grand principe de la stabilité du système du monde.

Pour démontrer que la première des conditions ci-dessus se trouve remplie lorsqu'on pousse l'approximation jusqu'aux termes du second ordre par rapport aux masses, reprenons la formule (a) de la page 295, savoir :

$$\delta a = 2a^2 [\partial R + \partial\delta R] + 8a^3 \int \left[\partial R \int \partial R \right],$$

et examinons successivement les différents termes dont se compose cette formule, afin de nous assurer qu'aucun d'eux ne peut renfermer des termes non périodiques ou séculaires.

Il est d'abord évident que la fonction $\partial R \int \partial R$ ne peut contenir aucun terme de cette espèce ; car en représentant par $m'\mathfrak{P} \cos(i'n't - int + \mathfrak{A})$ un terme quelconque du développement de R, la valeur de δa correspondante fournit, comme nous l'avons déjà reconnu, une inégalité dépendante du sinus du double de l'argument $(i'n't - int + \mathfrak{A})$, et, par conséquent, périodique. Voyons donc si les deux autres termes ∂R et $\partial\delta R$ peuvent en contenir.

Le premier terme δR est celui qui se présente dans la première approximation, et nous avons démontré qu'il ne contenait aucun terme non périodique. Si donc des termes de cette espèce peuvent exister dans δa, ils ne pourront provenir que de $\partial\delta R$ ou de la partie semblable $\partial\delta' R$ relative à m'. Considérons d'abord la première de ces fonctions, c'est-à-dire $\partial\delta R$. En supposant

$$\delta R = \frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{de}\delta e + \frac{dR}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{dR}{d\omega}\delta\omega + \frac{dR}{dp}\delta p + \frac{dR}{dq}\delta q,$$

Digitized by Google

et substituant pour δa, δe, ... δq leurs valeurs fournies par l'intégration des formules (2) de la page 220, on aura

$$\begin{aligned}\delta R = \Big\{ 2a^2 \Big(\frac{dR}{da}\int\frac{dR}{d\varepsilon} - \frac{dR}{d\varepsilon}\int\frac{dR}{da}\Big) \\ + \Big(\frac{dR}{d\varepsilon}\int\frac{dR}{de} - \frac{dR}{de}\int\frac{dR}{d\varepsilon}\Big) \\ + \Big(\frac{dR}{d\omega}\int\frac{dR}{de} - \frac{dR}{de}\int\frac{dR}{d\omega}\Big) \\ + \Big(\frac{dR}{dp}\int\frac{dR}{dq} - \frac{dR}{dq}\int\frac{dR}{dp}\Big)\Big\} ndt,\end{aligned}$$

expression dans laquelle il faudra se souvenir qu'en formant la dérivée $\frac{dR}{da}$ on ne doit point faire varier n.

Maintenant, si dans l'expression de δR on met pour R sa valeur en série de sinus et de cosinus des multiples de nt et $n't$, cette expression se trouvera décomposée en plusieurs fonctions de la forme

$$\mathfrak{W}\int\mathfrak{V}dt - \mathfrak{V}\int\mathfrak{W}dt,$$

$\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{V}$ désignant une suite de termes tels que

$$m'\mathfrak{P}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(i''n't - int + \mathfrak{A}).$$

Soit $\mathfrak{P}\cos(i''n't - int + \mathfrak{A})$ un terme quelconque de $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{P}'\cos(i''n't - int + \mathfrak{A}')$ le terme de $\mathfrak{V}$ ayant même argument

Digitized by Google

que le précédent. Pour avoir dans

$$\partial\left(\Psi\int\Upsilon dt - \Upsilon\int\Psi dt\right)$$

des quantités non périodiques, il faut combiner les termes ci-dessus de Ψ et Υ ; mais alors cette fonction ou $\partial\delta R$ devient

$$\mathfrak{P} indt \sin(i'n't - int + \mathfrak{A})\int\mathfrak{P}'dt\cos(i'n't - int + \mathfrak{A}')$$

$$- \mathfrak{P}' indt \sin(i'n't - int + \mathfrak{A}')\int\mathfrak{P}dt\cos(i'n't - int + \mathfrak{A}),$$

expression qui se réduit évidemment à zéro lorsqu'on effectue les intégrations indiquées. Donc $\partial\delta' R$ est une fonction périodique et le grand axe de l'orbite de m n'est assujetti à aucune inégalité séculaire provenant de la variation même des éléments $a.e$, ... de cette orbite.

Il nous reste à examiner si la fonction $\partial\delta' R$ relative aux variations des éléments elliptiques de m' peut contenir des termes non périodiques. Or, si l'on désigne par R' ce que devient la fonction R relativement au cas de m' troublé par m, et qu'on pose

$$R' = m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right),$$

on aura

$$R = \frac{m'}{m}R' + m'(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

La portion $\frac{m'}{m}\delta R'$ de la variation de cette fonction peut, comme dans le cas de δR, se décomposer en une suite de termes de la forme

$$\Psi'\int\Upsilon' dt - \Upsilon'\int\Psi' dt;$$

Digitized by Google

et pour que, dans la différentielle de cette fonction prise par rapport à la caractéristique ∂, il puisse entrer des termes autres que ceux périodiques, il faut combiner ensemble les termes de $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{V}'$, tels que

$$\mathfrak{P}\cos(i'n't - int + \mathfrak{A}), \qquad \mathfrak{P}'\cos(i'n't - int + \mathfrak{A}'),$$

c'est-à-dire dépendant du même argument $i'n' - in$. Il n'est pas difficile de voir alors que $\partial\left(\mathfrak{P}'\int\mathfrak{V}'dt - \mathfrak{V}'\int\mathfrak{P}'dt\right)$ se réduit à zéro après les deux intégrations; d'où il suit que $\frac{m'}{m}\delta R'$ ne peut contenir que des termes périodiques. Ainsi l'on est ramené à prendre simplement

$$R = m'(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

Or, en se rappelant que $\mu = M + m$, on a par les équations (G) de la page 44

$$m'\frac{x}{r^3} = -\frac{m'}{M}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{nm'}{M}\frac{x}{r^3} + \frac{m'}{M}\frac{dR}{dx},$$

$$m'\frac{x'}{r'^3} = -\frac{m'}{M}\frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{m'^2}{M}\frac{x'}{r'^3} + \frac{m'}{M}\frac{dR'}{dx'};$$

on a des expressions semblables pour les autres coordonnées y, z et y', z' de m et de m'.

On déduit aisément de là que

$$R = \frac{m'}{M}\left[\frac{d\{(xdx' - x'dx) + (ydy' - y'dy) + (zdz' - z'dz)\}}{dt^2}\right] + G.$$

G étant une fonction en x, y, z, x', y', z' de l'ordre du carré

Digitized by Google

des masses m et m', fonction qui est déterminée par l'équation

$$G = -\frac{m'^2}{M}\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right) - \frac{m'm}{M}\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right)$$
$$+ \frac{m'}{M}\left(\frac{dR}{dx} - x\frac{dR'}{dx'} + y'\frac{dR}{dy} - y\frac{dR'}{dy'} + z'\frac{dR}{dz} - z\frac{dR'}{dz'}\right).$$

Maintenant si, en n'ayant égard qu'au premier terme de l'expression ci-dessus de R, on pose

$$\partial R = \frac{m'}{M}\partial\left\{\frac{d\,(xdx' - x'dx + ydy' - y'dy + zdz' - z'dz)}{dt^2}\right\}$$

il n'est pas difficile de s'assurer que cette fonction ne renfermera aucun terme non périodique. Car x, y, z ne renfermant que des termes périodiques dépendant de nt, et x', y', z' des termes périodiques dépendant de $n't$, il est impossible que les produits tels que xdx', $x'dx$, ydy', $y'dy$, etc., renferment des termes dans lesquels les angles nt et $n't$ se détruisent, comme il le faudrait pour que la fonction $\frac{m'}{M}\partial\{\ldots\}$ pût renfermer des termes non périodiques. Donc cette fonction est bien périodique. Et quant au second terme ∂G auquel se réduit maintenant l'expression de ∂R, il est aisé de prouver que ce terme est de même nature que le premier, c'est-à-dire périodique. En effet, G étant du second ordre par rapport aux masses m et m', il suffit de substituer dans cette fonction à la place des coordonnées de ces planètes leurs valeurs elliptiques : alors les deux premiers termes de l'expression de G deviennent

$$-\frac{m'^2}{M}\left(\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{(M+m)\,dt^2}\right) + \frac{mm'}{M}\left(\frac{x'd^2x + y'd^2y + z'd^2z}{(M+m)\,dt^2}\right)$$

Digitized by Google

quantité qui ne saurait renfermer de termes non périodiques, puisque les produits xd^2x', yd^2y', $x'd^2x$, etc., n'en renferment pas eux-mêmes. Quant au terme

$$\frac{m'}{M}\left(x\frac{dR}{dx}-x\frac{dR'}{dx'}+y'\frac{dR}{dy}-y\frac{dR'}{dy'}+z'\frac{dR}{dz}-z\frac{dR'}{dz'}\right)$$

qu'il nous reste à considérer, il est facile de prouver qu'il ne contiendra pas non plus de termes de cette espèce ; car les dérivées $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$ étant supposées développées en une suite de sinus et de cosinus des multiples de nt et de $n't$, ces dérivées ne contiendront que des termes dépendant de nt; de même que $\frac{dR'}{dx'}$, $\frac{dR'}{dy'}$, $\frac{dR'}{dz'}$ ne renfermeront que des termes dépendant de $n't$. Comme d'ailleurs x', y', z' ne renferment que des termes périodiques dépendant de $n't$, et x, y, z des termes semblables dépendant de nt, il est impossible que les moyens mouvements nt et $n't$ disparaissent dans les produits tels que $x'\frac{dR}{dx}$, $y'\frac{dR}{dy}\cdots$, $z'\frac{dR}{dz}$, et, par suite, que la fonction considérée renferme des termes autres que ceux périodiques Donc enfin $\partial\delta R$ est bien une fonction périodique.

La démonstration qui précède pouvant s'étendre à un nombre quelconque de planètes perturbatrices et a étant lié à n par la relation $n = a^{-\frac{3}{2}}$, on voit que *les moyens mouvements et les grands axes des planètes sont invariables lorsqu'on fait abstraction des inégalités périodiques, et qu'on néglige les quantités du troisième ordre par rapport aux forces perturbatrices,* résultat très important, puisqu'il assure, relativement aux grands axes, la stabilité du système planétaire.

Digitized by Google

II. — Limites des variations séculaires des excentricités et des inclinaisons en ayant égard au carré de la force perturbatrice et a toutes les puissances de ces quantités.

Il nous reste maintenant à prouver que quelque loin qu'on pousse les approximations par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et en ayant même égard au carré de la force perturbatrice, les variations séculaires de ces éléments seront toujours renfermées dans d'étroites limites.

Reprenons pour cela les trois intégrales qui renferment le principe de la conservation des aires et que nous avons établies à la page 47. En négligeant les masses des planètes vis-à-vis de celle M du Soleil, la première de ces équations étendue à un nombre quelconque de corps m, m', m''..... pourra s'écrire ainsi :

$$\sum m\left(\frac{ydx - xdy}{dt}\right) + \sum mm'\left(\frac{xdy' - y'dx + x'dy - ydx'}{dt}\right) = \text{C}.$$

Soit φ l'inclinaison de l'orbite mobile de m sur le plan des xy; on aura

$$ydx - xdy = -\sqrt{a(1 - e^2)}\cos\varphi dt$$

et, par suite, l'expression ci-dessus deviendra

$$\sum m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi = \sum mm'\frac{(ydx' - xdy' + y'dx - x'dy)}{dt} + \text{C}.$$

Or, si l'on néglige les quantités périodiques ainsi que celles

Digitized by Google

qui sont du quatrième ordre par rapport aux masses, il est aisé de s'assurer que le second membre de cette équation restera constant. En effet, un produit tel que ydx', par exemple, ne saurait contenir des termes non périodiques quand on y substitue pour y et dx' leurs valeurs elliptiques ; car la valeur de y ne contenant que des termes périodiques dépendant de $n't$, tandis que la valeur de dx' ne renferme que des termes périodiques dépendant de nt, il est impossible que les moyens mouvements nt et $n't$ se détruisent dans le produit ydx'. Les termes non périodiques que ce produit peut contenir seront donc du second ordre, et comme ils sont fonctions des éléments elliptiques de m et de m', leur variation sera du second ordre ; d'où il suit que la variation de $mm'ydx'$ sera du quatrième ordre et qu'on pourra la regarder comme constante. La même chose pouvant se dire des autres produits xdy', $y'dx$, $x'dy$, et de ceux semblables relatifs aux coordonnées de m'', m'''..., on voit que le second membre de l'équation précédente reste constant lorsqu'on fait abstraction des inégalités périodiques et qu'on néglige les quantités du quatrième ordre par rapport aux masses. Quant au premier membre de la même équation, il restera constant aussi ; car si l'on substitue à la place des éléments elliptiques que ce membre renferme la partie périodique de leurs valeurs, les termes non périodiques qui en résulteront seront du troisième ordre par rapport aux masses et leurs variations du quatrième. Donc encore, ces termes pourront être regardés comme constants lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre m^4. Ainsi on aura

$$(1) \quad \sum m \sqrt{a(1-e^2)} \cos\varphi = C.$$

Digitized by Google

On obtiendrait pareillement en considérant les deux dernières intégrales de la page 47

$$(2) \qquad \sum m \sqrt{a(1-e^2)} \sin\varphi \cos\theta = C_1,$$

$$(3) \qquad \sum m \sqrt{a(1-e^2)} \sin\varphi \sin\theta = C_2,$$

équations qui, étant exactes aux quantités près du quatrième ordre, subsisteront non seulement entre les inégalités séculaires du premier ordre, mais encore entre toutes celles qui dépendent du carré des forces perturbatrices.

Maintenant, si pour simplifier on ne considère que l'action réciproque des deux planètes m et m', et que, désignant par δ l'inclinaison mutuelle de leurs orbites, on pose

$$\cos\delta = \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos(\theta' - \theta),$$

on aura, en ajoutant ensemble les trois équations précédentes (1), (2), (3), après les avoir élevées au carré,

$$m^2 a(1-e^2) + m'^2 a'(1-e'^2)$$
$$+ 2mm' \sqrt{a(1-e^2)} \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos\delta = const.,$$

ou bien, en faisant passer dans le second membre tous les termes constants et changeant les signes,

$$(4) \quad m^2 a e^2 + m'^2 a' e'^2 - 2mm' a^2 a'^2 nn' \sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e'^2} \cos\delta = const.$$

Mais on a

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}};$$

$$\sqrt{1-e'^2} = 1 - \frac{e'^2}{1+\sqrt{1-e'^2}}, \qquad \cos\delta = 1 - \frac{\sin^2\delta}{1+\cos\delta}.$$

Digitized by Google

Substituant ces valeurs dans l'équation (4) et faisant passer la constante $2mm'a^2a'^2nn'$ dans le second membre, on obtient

$$(5) \qquad m^2ae^2 + m'^2a'e'^2$$

$$+2mm'a^2a'^2nn'\left[\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos\delta + \frac{e'^2\sqrt{1-e'^2}}{1+\sqrt{1-e'^2}}\cos\delta + \frac{\sin^2\delta}{1+\cos\delta}\right] = \mathrm{K}$$

K désignant une constante arbitraire.

La valeur de cette constante doit dans tous les cas être fort petite par rapport aux carrés et aux produits des masses m et m' ; car dans le premier membre de l'équation (5), ces carrés et ces produits se trouvent multipliés par e^2, e'^2, $\sin^2\delta$, quantités dont les racines peuvent toujours être supposées très petites à une époque donnée. Comme d'ailleurs nt et nt' ou n et n' ne sauraient être de signes différents, soit que l'on suppose les planètes m et m' tourner dans le même sens autour du Soleil, ce qui est le cas de la nature, soit qu'on les suppose tourner en sens contraire, on voit que chacun des termes du premier membre de l'équation ci-dessus restera toujours très petit par rapport à m^2, m'^2, mm' et qu'ainsi les quantités e, e', δ et leurs analogues relatives à m'', m''', etc., demeureront dans tous les temps très peu considérables, comme elles le sont aujourd'hui. Concluons donc de là que la stabilité du système planétaire est assurée par rapport aux excentricités, aux inclinaisons et aux grands axes, en ayant égard au carré des forces perturbatrices et à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons, ce qui est l'importante proposition que nous avions à démontrer.

Digitized by Google

III. — Du plan invariable du système du monde. — Formules qui déterminent sa position

On nomme *plan invariable* du système du monde, un plan qui reste toujours parallèle à lui-même quels que soient les changements survenus dans les éléments des orbites planétaires par l'effet des attractions mutuelles.

Ce plan dont la découverte est due à Laplace jouit de deux propriétés remarquables qui permettent d'en retrouver facilement la position à un instant quelconque. Ces deux propriétés sont les suivantes :

1° La somme des produits de la masse de chaque planète, multipliée par l'aire que décrit son rayon vecteur projeté sur ce plan, est un *maximum ;*

2° La même somme relativement à un plan quelconque qui lui est perpendiculaire est *nulle.*

Soient φ l'inclinaison du plan invariable sur le plan des xy et θ la longitude de son nœud ascendant comptée à partir de l'axe des x. En se reportant à ce qui a été dit Chap. II, Livre I et aux formules (1), (2), (3) du paragraphe qui précède, on aura pour déterminer les angles φ et θ,

$$\operatorname{tang}\varphi \sin\theta = \frac{C_2}{C} = \frac{\sum m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\theta}{\sum m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\varphi \cos\theta = \frac{C_1}{C} = \frac{\sum m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\theta}{\sum m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi},$$

Digitized by Google

le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes semblables relatifs à m', m'', etc.

Dans l'état actuel de l'Astronomie, la considération du plan dont nous parlons est de peu d'importance, étant donnée la longue suite d'observations que l'on possède et qui permet de déterminer, avec une exactitude suffisante, les déplacements des orbes planétaires sans qu'il soit nécessaire d'en rapporter les mouvements à ce plan.

IV. — Des inégalités que la non-sphéricité du soleil introduit dans le mouvement des planètes

Nous allons dans ce paragraphe considérer l'influence que la non-sphéricité du Soleil exerce sur le mouvement des Planètes et nous proposer de déterminer les effets dus à cette cause.

Soient :

h l'ellipticité du Soleil dont nous supposerons la masse M égale à l'unité ;

D son demi-diamètre ;

q le rapport $\frac{f}{p}$ de la force centrifuge à la pesanteur, mesuré à l'équateur solaire ;

θ la déclinaison de la planète m relativement à cet équateur ;

r son rayon vecteur compté du centre du Soleil ;

γ l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'équateur solaire ;

ψ la longitude de la commune intersection de ces deux plans ;

Digitized by Google

v la longitude de la planète comptée sur le plan de son orbite.

La théorie de l'attraction des sphéroïdes enseigne que l'ellipticité du Soleil ajoute à la fonction R, la quantité

$$\Omega = \frac{KD^2}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right).$$

K est ici un coefficient constant dépendant de h, et l'on a

$$K = h - \frac{q}{2}.$$

Dans le cas de l'homogénéité, h est égal à $\frac{5}{q}$; ainsi

$$K = \frac{3}{4}q.$$

Soient v la vitesse angulaire de rotation du Soleil, A le demi-grand axe de son orbite et N son moyen mouvement ; on aura

$$f = v^2D, \quad p = \frac{M}{D^2} = \frac{A^3N^2}{D^2}, \quad q = \frac{v^2D^3}{N^2A^3},$$

et par conséquent

$$K = \frac{3}{4}\frac{v^2D^3}{N^2A^3}.$$

Mais en désignant par T la durée de la rotation du Soleil et par T′ la durée de la révolution sidérale de la Terre, on a

$$T = \frac{2\pi}{v} = 25^j, 4^h, 29^m,$$

$$T' = \frac{2\pi}{N} = 365^j, 25,$$

Digitized by Google

d'où l'on tire

$$\frac{v}{N} = \frac{365,25}{25,448}.$$

On a d'ailleurs

$$D = 16', 1'',45, \quad A = 1.000\,0000.$$

Au moyen de ces données, on trouve

$$\log\left(\frac{v}{N}\right)^2 = 2.313\,8730, \qquad \log\left(\frac{D}{A}\right)^3 = 3.005\,5000,$$

et de là on conclut

$$\log K = 5,194\,4344.$$

Revenons maintenant à l'expression ci-dessus de Ω. En considérant le triangle sphérique rectangle dont θ, γ et $(v - \psi)$ sont trois éléments et observant que γ est un angle toujours très petit, on a

$$\cos\theta = \gamma \sin(v - \psi);$$

on a par suite

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{KD^2}{r^3}\left[\frac{1}{3} - \gamma^2 \sin^2(v - \psi)\right] \\ &= \frac{KD^2}{r^3}\left[\frac{1}{3} - \gamma^2 - \gamma^2 \cos^2(v - \psi)\right],\end{aligned}$$

ou en négligeant les termes de l'ordre γ^2

$$\Omega = \frac{1}{3}\frac{KD^2}{r^3}.$$

Cette fonction Ω pouvant être considérée comme une fonction perturbatrice, on a par les formules (A) de la page 141, en

Digitized by Google

y supposant nulle l'excentricité de l'orbite,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -2a^2n\left(\frac{d\Omega}{da}\right),\\ \frac{de}{dt} &= -\frac{an}{e}\left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right),\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{an}{e}\left(\frac{d\Omega}{de}\right); \end{aligned}\right.$$

on a d'ailleurs

$$r\frac{d\Omega}{dr} = a\frac{d\Omega}{da} = -\frac{KD^2}{r^3},$$

$$\frac{d\Omega}{de} = -\frac{KD^2}{r^4}\left(\frac{dr}{de}\right),$$

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = -\frac{KD^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\omega}\right),$$

ou en prenant

$$r = a\left(1 + \frac{e^2}{2} - e\cos\zeta\right),$$

$$\frac{d\Omega}{de} = -\frac{KD^2}{r^4}a(e - \cos\zeta)$$

$$= -\frac{KD^2}{a^3}[(e - \cos\zeta)(1 + 4e\cos\zeta)] = \frac{KD^2}{a^3}(e + \cos\zeta),$$

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{KD^2}{a^3}e\sin\zeta.$$

Substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus (2), puis réduisant, on aura donc

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 2n\frac{KD^2}{a^2},$$

$$\frac{de}{dt} = -n\frac{KD^2}{a^2}\sin\zeta,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = n\frac{KD^2}{a^2} + n\frac{KD^2}{ea^2}\cos\zeta.$$

Digitized by Google

d'où l'on tire par l'intégration

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta\varepsilon = 2\,\dfrac{KD^2}{a^2}nt, \\[2ex] \delta e = \dfrac{KD^2}{a^2}\cos\zeta, \\[2ex] \delta\omega = \dfrac{KD^2}{a^2}nt + \dfrac{KD^2}{ea^2}\sin\zeta. \end{cases}$$

Ces équations montrent qu'en vertu de l'ellipticité du Soleil, les éléments ε et ω sont sujets à un mouvement *direct* exprimé par

$$2\,\frac{KD^2}{a^2}nt \quad \text{et} \quad \frac{KD^2}{a^2}nt$$

respectivement. La variation séculaire de l'époque est donc double de celle du périhélie. Quant à l'excentricité, elle n'est soumise qu'à des variations périodiques.

La même cause introduit dans le mouvement du nœud de l'orbite de la planète une inégalité égale et de signe contraire à celle du périhélie ; mais l'inclinaison n'est assujettie qu'à des variations périodiques.

Ces inégalités que l'influence de la figure du Soleil développe dans le mouvement des Planètes sont très peu sensibles ; elles le sont d'autant moins que la planète est plus éloignée du Soleil. En calculant le terme séculaire de l'expression de $\delta\omega$ pour une durée de cent ans, nous avons trouvé

Variation séculaire $\delta\omega$

Mercure. . .	1″,2208,	La Terre. .	0,0441,
Vénus. . . .	0,1369,	Mars	0,0109.

Pour les autres planètes principales, le même terme est tout à fait insensible.

Digitized by Google

LIVRE VI

INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA LUNE. — ANALYSE MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

CHAPITRE I

Théorie de la lune de Newton

. — DÉTERMINATION THÉORIQUE DES PRINCIPALES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE

Les difficultés théoriques que présente l'évaluation des inégalités qui affectent le mouvement de la Lune tiennent à deux causes distinctes : à l'intensité de la force perturbatrice qui élève, en général, les coefficients des inégalités, et à ses variations continuelles et rapides qui en diminuent la durée et en augmentent beaucoup le nombre. Newton en considérant cette dernière force a pu la décomposer en deux autres, l'une agissant dans le sens de la force centrale et l'autre dans la direction de la force qui est toujours tangente à l'orbite de la Lune ; et par cette décomposition, il est parvenu à expliquer très simplement les principales inégalités que l'observation a fait découvrir dans le mouvement de cet astre. Mais Newton ne s'est pas borné à cette simple explication qu'il a donnée dans le premier livre de ses *Principes ;* il y est revenu dans le

Digitized by Google

systemate mundi, et là, après avoir déterminé par le calcul la mesure exacte des forces perturbatrices du Soleil [a], il a donné les valeurs précises de chacune des inégalités dont nous parlons et fait voir qu'elles étaient conformes à l'observation.

La première des inégalités de la Lune que Newton a entrepris de calculer est celle qu'on appelle sa *variation*. On sait que cette inégalité provient en partie de la forme elliptique de l'orbite lunaire et en partie de l'inégalité des aires décrites par son rayon vecteur. Par la combinaison de ces deux causes, Newton obtient une équation qui s'élève à 32′, 32″ dans les octants, c'est-à-dire lorsque le lieu de la Lune est à 45° de celui du Soleil ou de la Terre [b] ; c'est le *maximum* de l'inégalité ou plutôt ce serait là sa plus grande valeur, si la Lune en passant de la quadrature à la syzygie décrivait un angle qui fût exactement de 90°. Mais à cause du mouvement réel de la Terre qui donne au Soleil un mouvement apparent, cet angle, décrit par la Lune, est toujours plus grand que l'angle droit et son excès varie dans le rapport même de la révolution synodique à la révolution périodique de cet astre. Tous les angles décrits autour de la Terre par le rayon vecteur lunaire doivent donc être augmentés dans le même rapport, et Newton trouve que cette augmentation, dans les moyennes distances du So-

(a) *Philosophiæ naturalis.* Prop. XXV. Livre III. Newton trouve que la partie de la force perturbatrice du Soleil qui agit suivant la direction du rayon vecteur de la Lune est, dans sa valeur moyenne, la 1 : 178,725 de celle qui retient la Lune dans son orbite ou la 1 : 638093 de la gravité à la surface de la Terre.

Quant à la seconde partie de la même force, celle qui agit parallèlement à la ligne qui va du centre du Soleil à la Terre, on déduit aisément du raisonnement de Newton, qu'elle est à la première force, comme 3 cos θ est à 1, θ désignant l'angle que font entre elles les droites qui joignent les centres de la Lune et de la Terre au centre du Soleil.

(b) *De mundi systemate.* Prop. XXIX.

Digitized by Google

leil à la Terre doit être de 2′,38″, ce qui porte le maximum de la variation lunaire à 35′ 10″. Dans les autres cas, c'est-à-dire pour les autres distances du Soleil à la Terre, Newton trouve encore que cette inégalité varie dans le rapport du carré du temps de la révolution synodique de la Lune, divisé par le cube de la distance du Soleil à la Terre, et fixe ainsi son maximum à 33′,14″ lorsque le Soleil est à son apogée, et à 37′,11″ lorsqu'il est à son périgée.

De l'examen de la variation de la Lune, Newton passe à celui du mouvement horaire des nœuds [a]; et dans cette recherche, comme dans la première, il néglige l'excentricité de l'orbite lunaire. Des deux composantes, dans lesquelles se décompose l'action perturbatrice solaire, Newton n'a besoin ici que de considérer la seconde ; car la première agissant dans le plan même de l'orbite lunaire, ne saurait altérer la position de ce plan et, par suite, être la cause du mouvement des nœuds. En n'ayant donc égard qu'à cette seconde force, Newton démontre facilement que la vitesse des nœuds est proportionnelle au produit des sinus des trois angles δ, δ_1, δ_2 qui expriment respectivement les distances de la Lune et du Soleil au nœud, et de la Lune à la quadrature ; et de cette loi il conclut que lorsque l'un de ces trois sinus passe du positif au négatif le mouvement des nœuds devient direct. Le contraire a lieu lorsque ce sinus de négatif qu'il était devient positif, car alors le mouvement direct se change en mouvement rétrograde. Ainsi, lorsque la Lune est entre une des quadratures et le nœud le plus voisin, les nœuds avancent suivant l'ordre des signes ; ils rétrogradent, au contraire, dans les autres

(a) *De mundi systemate.* Prop. XXX.

Digitized by Google

cas ; et comme le mouvement rétrograde est en excès sur le mouvement direct, il arrive qu'à la fin de chaque révolution les nœuds se sont mus contre l'ordre des signes, c'est-à-dire ont rétrogradé.

Quand les nœuds sont dans les quadratures et la Lune dans les syzygies, le moyen mouvement horaire de cet astre est de $32',56'',27''',13^{IV}$, et Newton trouve alors que le mouvement horaire du nœud doit être de $33'',10''',33^{IV}$. Dans les autres cas, le mouvement horaire du nœud est à l'angle $33'',10''',33^{IV}$, comme le produit des sinus des trois angles δ, δ_1, δ_2 est au cube du rayon.

Pour toutes les autres situations des nœuds et de la Lune, Newton démontre encore que le moyen mouvement horaire du nœud est égal à la moitié du mouvement horaire qui a lieu dans les syzygies, c'est-à-dire que ce mouvement est égal à $16'',35''',16^{IV},36^{V}$, multiplié par le carré du sinus de l'angle qui exprime la distance des nœuds aux syzygies.

Si l'on suppose que l'orbite lunaire soit une ellipse dont la Terre occupe le centre, le mouvement moyen des nœuds, dans les quadratures, se réduira à $16'',16''',37^{IV},42^{V}$; et dans les autres positions de la Lune, il sera proportionnel au carré du sinus de la distance au Soleil. Quant au mouvement moyen des nœuds dans une année sidérale, Newton le déduit des mouvements moyens considérés dans l'orbite elliptique et trouve que ce mouvement doit être de $19°,18',1'',23'''$, ce qui s'accorde assez bien, comme on voit, avec le résultat que fournissent les observations.

Dans la proposition XXXIII, Newton cherche à déterminer l'angle qu'il faut ajouter ou retrancher au mouvement moyen pour avoir le lieu vrai de la Lune dans un temps donné, et

Digitized by Google

pour cela il se sert d'une construction géométrique peu compliquée, mais qu'il donne sans démonstration [a]. Cet angle qu'il nomme l'*équation semestre* du mouvement des nœuds (*Æquatio semestris motus nodorum*), s'élève dans les octants à 1°,30′. Newton signale encore une autre inégalité de ce mouvement qui a lieu tous les mois et qu'il appelle *menstrua ;* mais il fait observer que sa considération n'est pas nécessaire dans la recherche de la latitude lunaire, parce que cette inégalité se trouve compensée presque exactement par une inégalité de même durée qui existe dans la variation de l'inclinaison de l'orbe lunaire.

La recherche du mouvement des nœuds de la Lune est intimement liée à celle de la variation de l'inclinaison du plan de son orbite. Newton s'occupe de ce dernier problème dans la proposition XXXIV, et trouve que la variation horaire de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, est égale au mouvement horaire maximum des nœuds ou à 33″, 10‴, 33ᴵᵛ, 12ᵛ, multiplié par le produit $\sin\delta \sin\delta_1 \sin\delta_2$, et divisé par le cube du rayon. Ce résultat convient seulement au cas du mouvement circulaire. Pour l'appliquer au mouvement elliptique, il faut

(*a*) Voici à peu près en quoi consiste cette construction de Newton.

Soit fait un angle A égal au double de celui qui exprime la distance du Soleil au lieu moyen du nœud ; et prenons sur les deux côtés de cet angle des distances BA, AC qui soient entre elles comme le moyen mouvement annuel des nœuds est à la moitié de leur mouvement vrai moyen, lorsqu'ils sont dans les quadratures, c'est-à-dire comme 19°, 49′, 3″, 55‴ est à 0°, 31′, 2″, 33‴ ou bien encore comme 38,3 est à 1. Si l'on achève alors le triangle BAC formé par l'angle A et par les deux côtés AB, AC, l'angle B de ce triangle, opposé au petit côté AC, sera la correction qu'il faudra appliquer au mouvement moyen des nœuds pour avoir leur mouvement vrai, correction qui sera positive ou négative suivant que les nœuds passeront des quadratures aux syzygies ou des syzygies aux quadratures.

Digitized by Google

le diminuer dans le rapport du petit axe au grand axe ou le multiplier par $\frac{1}{69}$.

La variation horaire de l'inclinaison étant ainsi déterminée, Newton cherche, dans la proposition suivante, la valeur de l'inclinaison pour un instant quelconque ; et en employant la même méthode que dans la proposition XXXIII, il trouve que le maximum de sa variation, lorsqu'on n'a point égard à la position qu'occupe la Lune dans son orbite, doit être de $16',23''\frac{1}{2}$. Les nœuds étant dans les quadratures, il faut diminuer cet angle de $1',21''\frac{1}{2}$, si la Lune est dans les quadratures et l'augmenter de la même quantité si elle est dans les syzygies. Newton admet que lorsque les nœuds sont dans les syzygies, l'inclinaison est de 5°, 17′, 20″ ; et il en conclut que lorsque les nœuds sont dans les quadratures et la Lune dans les syzygies, cette inclinaison n'est plus que de 4°, 59′, 35″.

II. — Des petites inégalités que Newton a mentionnées dans le scholie qui termine sa théorie de la Lune

Dans le scholie qui fait suite à la proposition XXXV du livre III, Newton a fait connaître plusieurs petites équations ou inégalités nouvelles qu'il dit avoir déduites de la Théorie, mais sans indiquer la route qu'il a suivie pour y parvenir. Ces inégalités que l'observation seule n'aurait pu que très difficilement faire découvrir à cause de leur petitesse, s'ajoutent aux grandes inégalités dont nous venons de parler et doivent en être considérées comme autant de corrections.

Digitized by Google

Elles ont servi de fondement aux premières Tables lunaires qui aient été construites d'après le principe de la gravitation universelle, et ont beaucoup contribué à les rendre plus parfaites.

La première des inégalités considérées par Newton est l'*équation annuelle* du moyen mouvement de la Lune dont la connaissance est due à Tycho-Brahé. Après avoir très simplement expliqué la cause de cette inégalité et montré qu'elle était due à un changement dans la vitesse de l'astre, Newton fixe son maximum à 11′,51″, valeur qui ne diffère pas de celle adoptée par Kepler et Horrox ; elle est additive lorsque la Terre va de son aphélie à son périhélie et soustractive dans le cas contraire. Cette équation que l'observation avait depuis longtemps indiquée suit exactement la même loi que l'équation du centre du Soleil, mais elle prend un signe contraire. Son argument ou l'angle dont elle dépend est donc exprimé par la distance du Soleil au périgée de son orbite ou par son anomalie moyenne.

Newton mentionne encore deux équations analogues à la précédente, et qui affectent le mouvement des nœuds et celui de l'apogée. Il fait la première de 9′,24″ dans son maximum et la seconde de 19′,43″. Newton entre ici dans quelques détails sur la manière dont il a déduit ces inégalités de la théorie, mais sa démonstration est loin d'être satisfaisante : elle s'appuie en effet sur deux propositions qu'il ne démontre pas et qu'il énonce pourtant comme des axiomes. La première consiste en ce que si la force perturbatrice solaire suivait l'inverse du cube des distances au lieu de suivre la loi du carré, l'équation du centre du Soleil augmenterait dans le rapport de 2°,54′, 30″ à 1° 56′, 20″ ou à peu près dans celui

Digitized by Google

de 3 à 2; la seconde est que les équations annuelles du mouvement de l'apogée et des nœuds doivent être à 2°,54′,30″ comme les mouvements moyens de l'apogée et des nœuds de la Lune sont au mouvement moyen du soleil. D'Alembert qui s'est livré dans le discours préliminaire de ses Recherches à un examen attentif de la théorie de Newton, semble élever quelques doutes sur l'exactitude de ces propositions; il trouve d'ailleurs que « lors même qu'elles seraient vraies, elles ne devraient pas être énoncées comme des axiomes ».

Le moyen mouvement de la Lune doit être encore corrigé de deux autres équations dépendantes de la distance du Soleil à la Terre, et qui viennent de ce que l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune est plus grande lorsque le grand axe de l'orbite lunaire est dirigé vers le Soleil que lorsque ce même axe en est éloigné de 90°. La première qui dépend directement de la distance angulaire du Soleil à l'apogée de la Lune est ce que Newton appelle *Équation semestre*. Elle est de 3′,45″ dans les moyennes distances du Soleil à la Terre, lorsque la ligne des apsides est à 45° du Soleil; mais Newton ne paraît pas la donner comme bien certaine [a]. La seconde appelée *seconde équation semestre* dépend du sinus de la double distance du Soleil au nœud de la Lune et s'élève à 47″ lorsque les nœuds sont aux octants et que la Terre est dans ses moyennes distances au Soleil. Pour les autres distances du Soleil, mais toujours pour la même situation des nœuds, cette équation varie dans le rapport inverse du cube

(*a*) Cette première équation semestre est la deuxième correction que Newton applique au mouvement moyen de la Lune; elle a été conclue des observations. Quant à la seconde elle est due certainement à la théorie: Newton après l'avoir donnée ajoute *uti ex theoria gravitatis colligo*. Clairaut faisait cette dernière équation de 1′,21″, d'Alembert de 1′,9″, Mayer de 58″, Lalande de 1′,0 et Delambre de 1′,2″.

Digitized by Google

de la distance du Soleil à la Terre ; elle est de 49″ environ lorsque le Soleil est à son périgée et de 45″ lorsqu'il est à son apogée.

Ces deux équations jointes à l'équation annuelle sont les trois premières corrections que Newton fait subir au lieu de la Lune ou à sa longitude moyenne. La quatrième correction est l'équation variable du centre que Newton déduit de l'anomalie moyenne et de l'excentricité, d'après la connaissance du lieu vrai de l'apogée. L'équation de ce lieu est considérable ; Newton la détermine au moyen des observations et trouve 12°,18′ environ lorsqu'elle est à son maximum. Pour en déterminer la valeur à une époque donnée quelconque, Newton se sert de l'hypothèse d'Horrox renouvelée par Halley, et qui consistait à faire mouvoir le centre L de l'ellipse lunaire dans un petit cercle LMN dont le rayon était le sinus de l'équation principale de l'apogée. La distance CT de son centre à la Terre exprimait alors l'excentricité moyenne de la Lune et cette même distance augmentée ou diminuée du rayon CL ou du sinus de l'apogée en était respectivement la plus grande et la plus petite valeur. En prenant ensuite sur ce cercle un arc LCM égal au double de la distance entre le Soleil et l'apogée moyen de la Lune, pour une époque donnée, l'angle CTM représentait l'équation de l'apogée et TM l'excentricité pour la même époque. Newton ne parle pas dans son Ouvrage de l'*Évection* qui était appelée seconde inégalité lunaire, mais il est évident qu'il la remplaçait par un changement d'excentricité dans l'orbite de la Lune avec un balancement dans l'apogée, comme Horrox l'avait fait avant lui.

La cinquième équation de correction dans la théorie de Newton est la *variation* dont nous avons déjà parlé au para-

Digitized by Google

graphe qui précède ; la sixième dépend de la distance de la Lune au Soleil, plus la distance de l'apogée de la Lune à celui du Soleil et est égale, dans son maximum, à 2′,25″. Newton l'appelle *seconde équation du centre;* elle est positive lorsque son argument est plus petit que 180° et négative lorsqu'il est plus grand que cet angle.

Enfin la septième et dernière équation qui s'applique à la longitude moyenne de la Lune, dépend de la simple distance de la Lune au Soleil et est de 2′, 20″ dans les quadratures, c'est-à-dire lorsqu'elle est dans son maximum. Mayer faisait cette équation de 1′,57″ et Clairaut de 3′,40″.

Digitized by Google

CHAPITRE II

Développement de la fonction perturbatrice dans le cas du mouvement troublé de la Lune. — Méthode de Delaunay.

I. — Forme générale de ce développement

Les équations qui définissent sous *forme canonique* le mouvement relatif de la Lune autour de la Terre, et auxquelles Delaunay s'est arrêté, dans sa *Théorie de la Lune*, sont, comme on l'a vu, les suivantes:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{d\mathcal{R}}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{d\mathcal{R}}{dG}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{d\mathcal{R}}{dh}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{d\mathcal{R}}{dH}, \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{d\mathcal{R}}{dl}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{d\mathcal{R}}{dL}, \end{aligned}\right.$$

g, h, l, G, H, L ont les significations que nous leur avons attribuées au chapitre III du livre II, et $\mathcal{R}$ est égal à

$$\mathcal{R}=\frac{\mu}{2a}+m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right].$$

Cette fonction, dans le cas qui nous occupe, résulte principa-

Digitized by Google

lement de l'action perturbatrice du Soleil, et l'on doit y remplacer x, y, z par leurs valeurs déduites des formules du mouvement elliptique et exprimées en fonction des variables g, h, l, G, H, L. Toutefois, pour faciliter le développement de $\mathcal{R}$, on substitue aux quantités G, H, L celles a, e, et $\gamma = \sin\frac{1}{2} i$, liées aux premières par les relations

$$a = \frac{L^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{H}{2G}},$$

qui se déduisent de celles que nous avons fait connaître aux pages 89 et 155.

En même temps que l'on remplace x, y, z, par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables, on doit mettre à la place de x' y' z', les valeurs de ces coordonnées qui sont supposées connues en fonction du temps ([a]).

$\mathcal{R}$ devient ainsi une fonction de a, e, γ, l, g, h, et cette fonction, par suite de la substitution de L et l à C et c, se trouve modifiée de telle sorte que le temps t n'y entre plus explicitement qu'introduit par les coordonnées du Soleil ; dans les coordonnées de la Lune, il est remplacé par l'anomalie moyenne l. En outre, $\mathcal{R}$ est augmenté d'un terme fonction du grand axe et indépendant de la masse troublante m', ce qui fait que cette fonction ne se réduit plus à zéro, lorsqu'on y suppose nulle l'action perturbatrice du Soleil.

([a]) Pour simplifier la question et n'avoir à en considérer que la partie capitale, on fait tout d'abord abstraction des inégalités qui affectent les éléments elliptiques du Soleil, et l'on néglige, en outre, dans l'évaluation de la force perturbatrice, le rapport $\frac{M}{m'}$ de la masse de la Terre à celle du Soleil, rapport qui est très petit. On tient compte ensuite, dans une seconde approximation, des termes négligés, ainsi que des effets très faibles dus à l'attraction des planètes, à la non-sphéricité de la Terre, etc.

Digitized by Google

Pour effectuer le développement de la fonction $\mathcal{R}$, nous prendrons, pour plan fixe, le plan de l'écliptique à une époque particulière correspondant à l'origine du temps, et nous rapporterons h et g au plan mobile des xy parallèle au premier. Ces angles seront alors la longitude du nœud ascendant de la Lune sur ce plan des xy, longitude comptée à partir de l'axe des x, et la distance angulaire du nœud ascendant au périgée. Cela posé, soient :

v l'angle compris entre la ligne des nœuds et le rayon vecteur r ;

i l'inclinaison de l'orbite lunaire ;

ξ et η les coordonnées du centre de la Lune sur le plan des xy, coordonnées rapportées à la droite d'où l'on compte l'angle v, et à une perpendiculaire à cette droite.

On aura

$$\xi = r \cos v,$$
$$\eta = r \sin v \cos i,$$

et en outre

$$z = r \sin v \sin i.$$

Mais en prenant pour axe des x la ligne fixe d'où l'on compte les longitudes, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, on a

$$x = \xi \cos h - \eta \sin h,$$
$$y = \eta \cos h + \xi \sin h.$$

On a donc

$$x = r \cos v \cos h - r \sin v \cos i \sin h,$$
$$y = r \cos v \sin h + r \sin v \cos i \cos h,$$
$$z = r \sin v \sin i.$$

Digitized by Google

Ces relations expriment, comme on voit, x, y, z, en fonction de v, h, i, et de r.

Relativement aux coordonnées x', y', z' dont l'origine est au centre du Soleil, si l'on désigne par r', v', h', i' des quantités analogues à celles r, v, h, i, savoir :

r' la distance du Soleil à la Terre ;

v' la distance angulaire du Soleil au nœud ascendant de l'écliptique mobile ;

h' la longitude du nœud ascendant de l'écliptique mobile comptée sur l'écliptique fixe à partir de la droite qui a été prise pour axe des x ;

i' l'inclinaison mutuelle des plans des deux écliptiques ;

on aura semblablement

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos v' \cos h' - r' \sin v' \cos i' \sin h', \\ y' &= r' \cos v' \sin h' + r' \sin v' \cos i' \cos h', \\ z' &= r' \sin v' \sin i'. \end{aligned}$$

Appelons δ le cosinus de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et r' ; on aura

$$\begin{aligned} xx' + yy' + zz' &= rr'\delta, \\ \rho^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\delta, \end{aligned}$$

et par suite l'expression précédente de $\mathcal{R}$ deviendra

$$(a) \qquad \mathcal{R} = \frac{\mu}{2a} + m'\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\delta}} - \frac{r\delta}{r'^2}\right].$$

Quant à la valeur de δ qui entre dans cette formule, elle est égale à

$$\begin{aligned} \delta = &(\cos v \cos h - \sin v \sin h \cos i)(\cos v' \cos h' - \sin v' \sin h' \cos i') \\ &+ (\cos v \sin h + \sin v \cos h \cos i)(\cos v' \sin h' + \sin v' \cos h' \cos i') \\ &+ \sin v \sin i \sin v' \sin i'. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Si l'on observe maintenant que

$$\sin i = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}, \quad \sin i' = 2\gamma'\sqrt{1-\gamma^2},$$
$$\cos i = 1 - 2\gamma^2, \quad \cos i' = 1 - 2\gamma'^2,$$

(γ' étant égal à $\sin \frac{1}{2} i'$), on pourra mettre cette expression de s sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} s = {} & (1 - \gamma^2 - \gamma'^2 + \gamma^2\gamma'^2) \cos(v + h - v' - h') \\ & + (\gamma^2 - \gamma^2\gamma'^2) \cos(v - h + v' + h') \\ & + (\gamma'^2 - \gamma^2\gamma'^2) \cos(v + h + v' - h') \\ (b) \qquad & + \gamma^2\gamma'^2 \cos(v - h - v' + h') \\ & + 2\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\,\sqrt{1-\gamma'^2} \cos(v - v') \\ & - 2\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\,\sqrt{1-\gamma'^2} \cos(v + v'). \end{aligned}$$

En substituant dans l'expression précédente (a) cette valeur de S, $\mathfrak{R}$ deviendra donc une fonction des variables γ, γ', v, v', h', h, r' et r'; et comme r et v sont donnés, d'après les formules du mouvement elliptique, en fonction de a, e, l, et g, $\mathfrak{R}$ aura finalement cette forme

$$\mathfrak{R} = \text{fonct. } m' (\gamma, \gamma', h, h', v, v', a, e, l, g).$$

Les valeurs de r' et de v' qui figurent dans cette expression se rapportent au mouvement apparent du Soleil, tel qu'il résulte des diverses causes qui le troublent. Pour rendre aussi simple que possible le développement de $\mathfrak{R}$, nous supposerons tout d'abord que ce mouvement se fait rigoureusement suivant les lois du mouvement elliptique, et nous ferons, par conséquent, abstraction des inégalités tant séculaires que périodiques qui l'affectent. r' et v' étant alors réduits à leur *partie elliptique*, les valeurs de ces quantités seront données, comme celles de r et de v, à l'aide des formules que nous avons fait connaître à la page 96, en ayant soin seulement d'y accen-

Digitized by Google

tuer les lettres a, e, l, g, qui y entrent. Par suite de cette supposition, l'angle γ' sera nul, h' deviendra une constante que l'on devra partout réunir à g', de telle sorte que $h' + g'$ représentera la longitude du périgée solaire; et quant à l'angle l', il aura pour valeur $n't + const.$, n' étant donné par la relation

$$n' = \frac{\sqrt{M + m'}}{a'\sqrt{a'}}.$$

Nous négligerons ici la masse M de la Terre qui est très petite relativement à celle m' du Soleil. Au lieu de la valeur

$$m' = \frac{a'^3 n'^2}{1 + \frac{M}{m'}}$$

qui se déduit de la formule précédente, nous pourrons donc, dans une première approximation, prendre simplement

$$m' = a'^3 n'^2.$$

II. — Développement de la fonction perturbatrice en série ordonnée par rapport aux excentricités et a l'inclinaison mutuelle des orbites de la lune et du soleil.

Il nous reste à effectuer le développement de la fonction $\mathcal{R}$ dont nous venons d'indiquer la formation.

La distance r' du Soleil à la Terre étant très grande relativement à celle r de la Lune, on peut développer le premier terme entre parenthèses de l'expression de R en série très convergente, ordonnée suivant les puissances de $\frac{r}{r'}$. Posons

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\delta}} = \frac{1}{r'} U_0 + \frac{r}{r'^2} U_1 + \frac{r^2}{r'^3} U_2 + \frac{r^3}{r'^4} U_3 + \ldots;$$

Digitized by Google

l'expression générale du coefficient U_m se trouvera, comme on sait, en cherchant le coefficient de r^m dans le développement de $(1 - 2rs + r^2)^{-\frac{1}{2}}$, et l'on aura

$$U_m = \frac{1.3.5...2m-1}{1.2.3...m}\left[s^m - \frac{m(m-1)}{(2.2m-1)}s^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.(2m-1)(2m-3)}s^{m-4} - \text{etc.}\right]$$

Faisant successivement dans cette expression $m = 0, 1, 2, 3...$, on aura donc

$$U_0 = 1,$$
$$U_1 = s,$$
$$U_2 = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2},$$
$$U_3 = \frac{5}{2}s^3 - \frac{3}{2}s,$$
$$U_4 = \frac{5}{2}\frac{7}{4}s^4 - \frac{3}{2}\frac{5}{4}2s^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4},$$
$$U_5 = \frac{7}{2}\frac{9}{4}s^5 - \frac{5}{2}\frac{7}{4}2s^3 + \frac{3}{2}\frac{5}{4}s,$$
$$U_6 = \frac{7}{2}\frac{9}{4}\frac{11}{6}s^6 - \frac{5}{2}\frac{7}{4}\frac{9}{6}3s^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}3s^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Par suite, l'expression complète de $\mathcal{R}$ deviendra

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{2a} + m'\frac{r^2}{r'^3}\left[U_2 + \frac{r}{r'}U_3 + \frac{r^2}{r'^2}U_4 + \frac{r^3}{r'^3}U_5 + \ldots\right].$$

Nous supprimons ici le terme $\frac{1}{r'}$, terme qui ne renfermant pas les éléments l', g', h', L, G, H, disparaîtrait des formules (1).

Il faut maintenant substituer dans les valeurs de U_2, U_3.... l'expression (6) de $\mathcal{S}$ et y faire $\gamma' = 0$, puisque nous négligeons

Digitized by Google

les inégalités du mouvement du Soleil. Or, à cause de la petitesse du rapport $\frac{r}{r'}$ dont les diverses puissances sont les facteurs de U_2, U_3... on peut, dans l'expression ci-dessus de $\mathcal{R}$, négliger d'abord les termes qui sont de l'ordre $\frac{r^4}{r'^4}$, termes qui ne produiraient que des inégalités insensibles. Par la même raison, on peut encore, dans les valeurs de U_3, U_4 et U_5 que l'on conserve, faire abstraction des termes en γ^5, γ^3 et γ respectivement. Ainsi simplifiée, la fonction $\mathcal{R}$ se développe facilement en une série de cosinus d'angles formés par la réunion des divers multiples de h, g, l, h', g', l', et donne, en s'arrêtant aux dix premiers termes,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} = \frac{\mu}{2a} + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ & \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 \\
& - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{9}{64}\frac{a^2}{a'^2} \\
& + \Big[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 + \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 \\
& + \frac{69}{64}e^4 + \frac{75}{16}e^2 e'^2 + \frac{5}{16}\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') \\
& + \Big[-\frac{1}{2}e + 3\gamma^2 e + \frac{1}{16}e^3 - \frac{3}{4}ee'^2 - 3\gamma^4 e - \frac{3}{8}\gamma^2 e^3 \\
& + \frac{9}{2}\gamma^2 ee'^2 - \frac{1}{384}e^5 + \frac{3}{32}e^3 e' - \frac{9}{16}e\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos l \\
& + \Big[\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{8}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{27}{4}\gamma^2 e^2 e' \\
& - \frac{81}{16}\gamma^2 e'^3 + \frac{81}{64}e^2 e'^3 + \frac{261}{256}e'^5 + \frac{45}{64}e'\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos l' \\
& + \Big[\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e - \frac{57}{32}e^3 - \frac{15}{8}ee'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 e + \frac{57}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2 \\
& + \frac{321}{256}e^5 + \frac{285}{64}e^3 e'^2 + \frac{39}{64}ee'^4\Big]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l') \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Delaunay, qui a poussé ce développement jusqu'aux quantités du huitième ordre, est parvenu à une expression qui ne renferme pas moins de 321 termes.

III. — Ordre des différents termes qui entrent dans l'expression de la fonction perturbatrice

Afin de pouvoir facilement distinguer, dans le développement de la fonction perturbatrice, l'ordre des termes que l'on doit conserver d'après le degré d'approximation auquel on désire s'arrêter, on est convenu de regarder le rapport $\frac{n'}{n}$ des moyens mouvements du Soleil et de la Lune comme une quantité très petite du premier ordre ; ce rapport est représenté à très peu près par la fraction $\frac{1}{13}$, la distance moyenne du Soleil à la Terre étant 1.

Pareillement, on regarde comme des quantités du premier ordre les fractions e, e', γ, dont les valeurs sont à très peu près égales à $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{22}$. Quant aux carrés et aux produits de ces quantités, à leurs cubes et à leurs produits de trois dimensions etc. on les considère, en général, comme des quantités du deuxième ordre, du troisième ordre, etc. Toutefois, à l'égard de e', comme cette quantité est environ trois fois plus petite que celle γ, il convient de regarder e'^3, e'^4, e'^5... comme des quantités des quatrième, cinquième, sixième ordres, etc.

Relativement au rapport $\frac{a}{a'}$ des moyennes distances de la Lune et du Soleil à la Terre, rapport qui est à très peu près

Digitized by Google

égal à $\frac{1}{400}$, on le considère comme une quantité du second ordre. Enfin on regarde comme étant du second ordre le facteur $m'\frac{a^2}{a'^3}$, qui multiplie les premiers termes du développement de $\mathcal{R}$. Le rapport de ce terme à celui non périodique $\frac{\mu}{2a}$ est, en effet,

$$2\frac{m'a^3}{\mu a'^3} = 2\frac{n'^2}{n^2},$$

et nous avons vu que la quantité $\frac{n'}{n}$ est du premier ordre.

De là résulte que les autres facteurs

$$m'\frac{a^3}{a'^4}, \quad m'\frac{a^4}{a'^5}, \quad m'\frac{a^5}{a'^6}\cdots$$

dont les rapports au premier terme $\frac{\mu}{2a}$ ont respectivement pour valeurs

$$2\frac{n'^2}{n^2}\frac{a}{a'}, \quad 2\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}, \quad 2\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^3}{a'^3}\cdots$$

devront être regardés comme des quantités des quatrième, sixième, huitième ordres, et ainsi de suite.

IV. — Expression des coordonnées de la Lune en fonction du temps

Les trois coordonnées que les astronomes ont coutume d'employer pour fixer à chaque instant la position de la Lune par rapport à l'écliptique, sont sa *longitude* v, sa *latitude* φ et sa

Digitized by Google

parallaxe équatoriale Π. Ce sont ces trois coordonnées que l'on substitue à celles rectilignes x, y, z, que nous avons jusqu'ici considérées ; et comme ces dernières sont des fonctions connues de l, g, h, L, G, H, ou si l'on veut de a, e, γ, l, g, h, on voit qu'il faut tout d'abord exprimer v, φ et Π en fonction des mêmes quantités.

Soient à cet effet,

v_1 la longitude de la lune comptée sur l'écliptique fixe, c'est-à-dire sur le plan des xy à partir de l'axe des x ;

φ sa latitude rapportée au même plan ;

Π la parallaxe équatoriale ;

r le rayon vecteur qui joint la Lune à la Terre ;

Q le rayon équatorial de la Terre.

Par la considération du triangle sphérique rectangle dont v est l'hypoténuse, $v_1 - h$ un côté de l'angle droit et i l'angle adjacent, on aura d'abord

$$(a) \qquad \operatorname{tang}(v_1 - h) = \operatorname{tang} v \cos i.$$

On aura ensuite en considérant le second côté φ de l'angle droit

$$(b) \qquad \sin \varphi = \sin v \sin i.$$

Quant à l'expression de la parallaxe Π, elle est égale à l'inverse $\frac{1}{r}$ de la distance de la Lune à la Terre, multipliée par Q, c'est-à-dire que l'on a

$$(c) \qquad \Pi = Q \frac{1}{r}.$$

Digitized by Google

La valeur de $\frac{1}{r}$ peut aisément se déduire de celle que nous avons donnée pour r; et en s'arrêtant aux termes du cinquième ordre par rapport à e, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\Big[1 &+ \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5\right)\cos l \\ &+ \left(e^2 - \frac{1}{3}e^4\right)\cos 2l \\ &+ \left(\frac{9}{8}e^3 - \frac{81}{128}e^5\right)\cos 3l \\ &+ \frac{4}{3}e^4 \cos 4l \\ &+ \frac{625}{384}e^5 \cos 5l\Big].\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on remplace dans les équations (a) et (b) $\cos i$ et $\sin i$ par leurs valeurs en fonction de γ, savoir $1 - 2\gamma^2$ et $2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}$, puis qu'on développe en séries les valeurs résultantes, on trouvera en s'arrêtant aux termes qui sont du sixième ordre par rapport à γ,

$$\begin{aligned}v_1 = h + v &- (\gamma^2 + \gamma^4 + \gamma^6)\sin 2v \\ &+ \left(\frac{1}{2}\gamma^4 + \gamma^6\right)\sin 4v \\ &- \frac{1}{3}\gamma^6 \sin 6v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi = &\left(2\gamma - \frac{1}{4}\gamma^3\right)\sin v \\ &- \left(\frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{1}{4}\gamma^3\right)\sin 3v \\ &+ \frac{3}{20}\gamma^3 \sin 5v.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Il ne reste plus qu'à remplacer dans ces expressions et dans celle de $\frac{1}{r}$, v par sa valeur (a) et à effectuer les développements indiqués. Alors v_1 φ et $\frac{1}{r}$ se trouveront exprimés en fonction de a, e, γ, l, g, h, dont les valeurs seront fournies par l'intégration des équations (1), après que $\mathcal{R}$ y aura été remplacé par son développement en série.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Équations différentielles du problème des trois corps

I. — Solution générale de Lagrange

Considérons trois corps m, m', m'' soumis à leur attraction mutuelle supposée proportionnelle aux masses et en raison inverse du carré des distances. Désignons par x, y, z les coordonnées rectangles du corps m' autour de m et par x', y', z' celles du corps m'' autour du même point. Soient de plus

$$(1)\quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \overline{mm'}^2, \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \overline{mm''}^2, \\ \rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = \overline{m'm''}^2, \\ \mu = m + m', \ \mu' = m + m''. \end{cases}$$

D'après ce qu'on a vu au chapitre I du livre I, on aura pour exprimer les mouvements relatifs des corps m' et m'' autour

Digitized by Google

de celui m, les six équations différentielles suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} + m''\left(\dfrac{x-x'}{\rho^3} + \dfrac{x'}{r'^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} + m''\left(\dfrac{y-y'}{\rho^3} + \dfrac{y'}{r'^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{\mu z}{r^3} + m''\left(\dfrac{z-z'}{\rho^3} + \dfrac{z'}{r'^3}\right) = 0; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} + \dfrac{\mu' x'}{r'^3} + m'\left(\dfrac{x'-x}{\rho^3} + \dfrac{x}{r^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + \dfrac{\mu' y'}{r'^3} + m'\left(\dfrac{y'-y}{\rho^3} + \dfrac{y}{r^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} + \dfrac{\mu' z'}{r'^3} + m'\left(\dfrac{z'-z}{\rho^3} + \dfrac{z}{r^3}\right) = 0. \end{cases}$$

Soient

$$x' - x = x_1, \quad y' - y = y_1, \quad z' - z = z_1,$$

d'où

$$\rho = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;$$

x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées rectangles de l'orbite du corps m'' autour de m', et en posant $\mu_1 = m' + m''$, on aura pour les équations différentielles du mouvement

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{\mu_1 x_1}{\rho^3} + m\left(\dfrac{x_1 - x'}{r^3} + \dfrac{x'}{r'^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} + \dfrac{\mu_1 y_1}{\rho^3} + m\left(\dfrac{y_1 - y'}{r^3} + \dfrac{y'}{r'^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} + \dfrac{\mu_1 z_1}{\rho^3} + m\left(\dfrac{z_1 - z'}{r^3} + \dfrac{z'}{r'^3}\right) = 0. \end{cases}$$

Les équations différentielles (2) et (3) renferment la solution du problème des trois corps pris dans toute sa généralité ; elles

Digitized by Google

sont du second ordre et aux nombre de six. Mais en les exprimant en fonction des variables principales r, r', ρ, comme l'a fait Lagrange, on peut les réduire à deux équations différentielles du second ordre et à une du troisième. Voici l'analyse très simple sur laquelle repose cette transformation, analys que l'on peut rendre plus concise encore, en modifiant légèrement la marche du calcul suivie par Lagrange.

On déduit de la première des équations (1) en la différentiant deux fois de suite par rapport à t,

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r)^2}{dt^2} = x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + v^2,$$

expression dans laquelle

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Or, si dans cette équation on met à la place des dérivées $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, leurs valeurs fournies par les équations (2), et qu'on ait égard aux relations

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad xx' + yy' + zz' = \frac{1}{2}(r^2 + r'^2 - \rho^2).$$

on aura

$$(6) \quad \frac{1}{2}\frac{d^2(r)^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{m''}{\rho^3}\right) + m''\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)\frac{1}{2}(r^2 + r'^2 - \rho^2) - v^2 = 0,$$

équation qui subsiste quand on y remplace r, m'', v par r', m', v, ou par ρ, m, v'', ce qui donne deux autres équations pour exprimer $\frac{d^2(r')^2}{dt^2}$ et $\frac{d^2(\rho)^2}{dt^2}$.

Digitized by Google

On a d'ailleurs par la différentiation de l'équation qui donne v^2

$$vdv = \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz,$$

d'où en mettant encore pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, leurs valeurs tirées des équations (2)

$$(7)\quad vdv = -\left(\frac{\mu}{r^3}+\frac{m''}{\rho^3}\right)rdr - m''\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)(x'dx+y'dy+z'dz).$$

Faisons pour abréger

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(r'^2+\rho^2-r^2)=\sigma,\\ &\frac{1}{2}(r^2+\rho^2-r'^2)=\sigma',\\ &\frac{1}{2}(r^2+r'^2-\rho^2)=\sigma'',\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\rho^3}=\sigma_1,\quad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}=\sigma_2\quad \frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}=\sigma_1-\sigma_2=\sigma_3;$$

il en résultera

$$\frac{1}{\rho^3}=\frac{1}{r^3}-\sigma_2,\ rdr=\frac{1}{2}(d\sigma'+d\sigma''),$$

et, par suite, l'expression ci-dessus de vdv deviendra

$$vdv=-\frac{\mu+m''}{r^2}dr+m''[\sigma_2(d\sigma'+d\sigma_1)-\sigma_1(x'dx+y'dy+z'dz)].$$

Maintenant si l'on différentie l'équation identique

$$xx'+yy'+zz'=\frac{1}{2}(r^2+r'^2-\rho^2)$$

Digitized by Google

et qu'on pose

$$(x'dx - xdx') + (y'dy - ydy') + (z'dz - zdz') = d\zeta,$$

on aura

$$x'dx + y'dy + z'dz = \frac{1}{2}(rdr + r'dr' - \rho d\rho + d\zeta)$$
$$= \frac{1}{2}(d\sigma'' + d\zeta).$$

On aura donc

$$2vdv = -2\frac{\mu + m''}{r^2}dr + m''[\sigma_2 d\sigma' + \sigma_2 d\sigma'' - \sigma_1 d\sigma'' - \sigma_1 d\zeta]$$

ou en remplaçant $\sigma_2 - \sigma_1$ par $-\sigma_3$ et posant

$$d\sum = \sigma_2 d\sigma' - \sigma_3 d\sigma'' - \sigma_1 d\zeta,$$

$$2vdv = -2\frac{\mu + m''}{r^2}dr + m''\,d\sum,$$

équation qui étant intégrée donne

$$(10) \qquad v^2 = 2\frac{\mu + m''}{r} + m''\sum.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b) et remarquant que, d'après les relations (8) et (9),

$$\frac{r^2}{\rho^3} = \frac{1}{r} - \sigma_2(\sigma' + \sigma''),$$

$$\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)\frac{1}{2}(r^2 + r'^2 - \rho^2) = \sigma_1\sigma'',$$

on aura enfin

$$(a) \quad \frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{\mu + m''}{r} - m''\left(\sigma'\sigma_2 - \sigma''\sigma_3 + \sum\right) = 0.$$

Digitized by Google

En posant

$$d\sum' = \sigma_1 d\sigma + \sigma_3 d\sigma'' + \sigma_2 d\zeta$$

$$d\sum'' = -\sigma_1 d\sigma - \sigma_2 d\sigma' + \sigma_3 d\zeta,$$

on trouverait de même

$$(b)\quad \frac{1}{2}\frac{d^2(r'^2)}{dt^2} - \frac{\mu + m''}{r'} - m'\left(\sigma\sigma_1 + \sigma''\sigma_3 + \sum'\right) = 0$$

$$(c)\quad \frac{1}{2}\frac{d^2(\rho)^2}{dt^2} - \frac{\mu + m''}{\rho} - m''\left(-\sigma\sigma_1 - \sigma'\sigma_2 + \sum''\right) = 0.$$

Il reste à déterminer la valeur de ζ. Or si l'on différentie l'expression précédente de $d\zeta$ et que, dans le résultat de cette différentiation

$$d^2\zeta = (x'd^2x - xd^2x') + (y'd^2y - yd^2y') + (z'd^2z - zd^2z'),$$

on substitue pour d^2x, d^2y, d^2z, d^2x'... leurs valeurs tirées des équations (2) et (3), on aura pour déterminer $d\zeta$

$$(z)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + m''\sigma\sigma_1 - m'\sigma'\sigma_2 - m\sigma''\sigma_3 = 0.$$

Ajoutons les trois équation (a), (b), (c), après les avoir divisées par m, m', m'', respectivement; en remarquant que

$$d\sum + d\sum' + d\sum'' = 0,$$

d'où

$$\sum + \sum' + \sum'' = const.,$$

Digitized by Google

on aura

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2(r)^2}{m''dt^2}+\frac{d^2(r')^2}{m'dt^2}+\frac{d^2(\rho)^2}{mdt^2}\right]$$
$$-\mu+m''\left(\frac{1}{m''r}+\frac{1}{m'r'}+\frac{1}{m\rho}\right)=const.,$$

équation qui n'est qu'une transformation de l'intégrale des forces vives.

Les trois équations (a), (b), (c) qui précèdent étant des fonctions de r, r', ρ, de leurs différentielles premières dr, dr', $d\rho$ et de $\frac{d\zeta}{dt}$ qui y est introduit par les valeurs de $\sum$, $\sum'$ et $\sum''$, on voit que si, de l'une quelconque de ces équations, on tire la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$ pour la porter dans les deux autres, ces dernières ne cesseront pas d'être différentielles du second ordre; tandis que si l'on forme la dérivée $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ pour la substituer dans l'équation (α), celle-ci entre les mêmes variables r, r', ρ et t montera au troisième ordre. Le système différentiel de Lagrange est donc réduit à deux équations du second ordre et à une du troisième, et le nombre des intégrations à effectuer est de *sept*. Ces trois équations ayant lieu entre les distances r, r', ρ et le temps t, pourront servir à déterminer, pour chaque instant donné, la position relative des trois corps m, m', m''.

II. — Analyse des cas ou le problème des trois corps admet une solution rigoureuse

Nous avons analysé dans l'*Introduction historique* les deux cas où le problème des trois corps admet une solution rigou-

Digitized by Google

reuse. Il nous reste maintenant à développer la solution de ces cas, c'est-à-dire à exprimer analytiquement les conditions que doivent remplir les masses, les vitesses et les distances des trois corps pour que le mouvement de deux quelconques d'entre eux autour du troisième, soit de même nature que celui d'un point matériel attiré par un centre fixe, question que l'on sait résoudre exactement.

Soient donc m, m', m'' les masses de trois corps ou points matériels que nous supposerons s'attirer suivant la loi générale de la gravitation. Admettons que le mouvement de deux de ces points, savoir m' et m'' s'effectue toujours dans un même plan autour du troisième m, et soient:

x et y les coordonnées du point m' par rapport à des axes rectangulaires passant par le point m;

x' et y' des coordonnées semblables relatives au point m'';

r, r', ρ les distances mutuelles $\overline{mm'}$, $\overline{mm''}$, $\overline{m'm''}$, en sorte que

$$r^2 = x^2 + y^2,\ r'^2 = x'^2 + y'^2,\ \rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

D'après ce qu'on a vu au paragraphe qui précède, on aura pour déterminer les mouvements relatifs de m' et m'' autour du point m

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\mu x}{r^3} + m''\left(\frac{x - x'}{\rho^3} + \frac{x'}{r'^3}\right) = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\mu y}{r^3} + m''\left(\frac{y - y'}{\rho^3} + \frac{y'}{r'^3}\right) = 0; \\ \frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{\mu' x'}{r'^3} + m'\left(\frac{x' - x}{\rho^3} + \frac{x}{r^3}\right) = 0 \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= \frac{\mu' y'}{r'^3} + m'\left(\frac{y' - y}{\rho^3} + \frac{y}{r^3}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Posons

$$(2) \qquad x = (1+p)\,x', \quad y = (1+p)\,y',$$

d'où

$$r = (1+p)\,r', \quad \rho = pr',$$

p étant une constante qui sera essentiellement positive, si l'on suppose $r > r'$; on aura

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

Or, si l'on substitue les valeurs (2) dans la troisième des équations (1), on aura

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \left[\mu' + \frac{m'}{(1+p)^2} - \frac{m'}{p^2}\right]\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

ou en représentant par K′ la partie entre crochets

$$(3) \qquad \frac{d^2x'}{dt^2} + K'^2\frac{x'}{r'^3} = 0.$$

Les mêmes substitutions faites dans la première des équations (1) donnent

$$(1+p)\frac{d^2x'}{dt^2} + \left[\frac{\mu}{(1+p)^2} + m'' + \frac{m''}{p^2}\right]\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

en sorte que la condition pour déterminer p est exprimée par la relation

$$\frac{\mu}{(1+p)^3} + \frac{m''}{1+p} + \frac{m''}{p^2(1+p)} = \mu' + \frac{m'}{(1+p)^2} - \frac{m'}{p^2}$$

Digitized by Google

ou par celle

$$(4)\quad \begin{cases} \mu'' p^5 + (3m + 2m'')\, p^4 + (3m + m'')\, p^3 \\ -(m'' + 3m')\, p^2 - (2m'' + 3m')\, p - (m' + m'') = 0 \end{cases} {}^{(a)}.$$

La seconde et la quatrième des équations (1), traitées de la même manière, conduiraient à l'équation

$$(5)\qquad \frac{d^2 y'}{dt^2} + K'^2 \frac{y'}{r'^3} = 0$$

et à la même relation (α). Ainsi les équations (1) sont satisfaites en prenant pour x et y des valeurs de la forme (2). Et comme la relation (4) supposée remplie, rend la première et la troisième des équations (1) identiques entre elles et avec l'équation (3); de même qu'elle rend la seconde et la quatrième des mêmes équations identiques entre elles et avec l'équation (5), on en conclut que le cas de

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

(a) Si dans le premier membre de cette relation, on fait successivement $p = 0$, $p = 1$, on obtient

$$-(m' + m''),\quad 7m - 7m',$$

résultats de signes contraires, tant que l'on a $m > m''$. Donc, dans ce cas, p est toujours inférieur à l'unité.

Lorsqu'on suppose que les trois masses m, m', m'' se rapportent respectivement au Soleil, à la Terre et à la Lune, la valeur positive de p est une très petite fraction, et l'on a approximativement

$$p = \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}}$$

ou a très peu près

$$p = \frac{1}{100},$$

comme Laplace l'a fait observer au Livre X de la *Mécanique céleste*.

Digitized by Google

est un de ceux où le problème des trois corps admet une solution rigoureuse. Cette solution exige non seulement que les trois corps soient constamment en ligne droite, mais encore que leurs distances r et r' soient dans un rapport constant déterminé par la relation

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{1+p}.$$

La seconde solution est celle où les trois corps sont constamment situés aux sommets d'un triangle équilatéral et, par conséquent, où l'on a

$$(6) \qquad r = r' = \rho \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} = \frac{d\rho}{dt}.$$

Dans ce cas, les équations (1) se réduisent aux suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + (\mu + m'')\dfrac{x}{r^3} = 0, & \dfrac{d^2x'}{dt^2} + (\mu' + m')\dfrac{x'}{r'^3} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + (\mu + m'')\dfrac{y}{r^3} = 0, & \dfrac{d^2y'}{dt^2} + (\mu' + m')\dfrac{y'}{r'^3} = 0, \end{cases}$$

et l'on voit alors que chacun des deux corps m', m'' se meut comme s'il était attiré par le centre de gravité avec une masse égale à la masse totale des trois corps. La seconde des relations (6) montre, en outre, que les vitesses de ces deux corps doivent être égales et également inclinées sur les rayons vecteurs r et r' qui joignent chacun de ces corps au centre de gravité m.

En résumé, on voit que les suppositions de

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

Digitized by Google

et de

$$r = r' = \rho$$

ramènent les équations (1) à celles (3), (5) ou (7) qui ont la même forme que les équations qui régissent le mouvement d'un point attiré par un centre fixe; et c'est pour cela que ces deux cas particuliers sont susceptibles d'une solution exacte. On retrouverait, du reste, les conditions (2) et (6), en identifiant les deux premières des équations (1) et les deux dernières, avec celles (3) et (5) respectivement.

Digitized by Google

Seconde Partie

APPLICATION DES PRINCIPES QUI PRÉCÈDENT A L'EXPLICATION ET A LA FORMATION DES TABLES DU MOUVEMENT DES PLANÈTES

LIVRE I

Parties séculaires et parties périodiques des éléments des orbites

---

CHAPITRE I

Valeurs provisoires et valeurs corrigées des éléments

I. — Considérations générales. — Valeurs provisoires des éléments

L'ensemble des formules et des données numériques auxquelles conduit l'application des Théories qui précèdent, permet de calculer directement la position héliocentrique d'une planète à une époque donnée quelconque. Mais le calcul du lieu d'un astre ainsi effectué serait extrêmement long, impraticable même, s'il fallait l'étendre à un grand nombre de positions. Il devient donc indispensable, pour l'abréger, de réduire en nombres les formules de la théorie et d'en composer des *Tables générales* qui permettent de calculer beaucoup plus rapidement la position héliocentrique de l'astre à l'époque considérée. C'est ce sujet que nous allons traiter dans cette seconde partie de l'Ouvrage, en bornant nos explications et nos calculs aux Tables de Jupiter et de

Digitized by Google

Saturne, telles que Le Verrier les a données dans les tomes XI et XII de ses *Recherches astronomiques*.

Dans les Tables dont nous parlons, le temps t, pris pour la variable indépendante, y est compté en années juliennes de $365^j.25$ et commence au midi moyen du 1er janvier 1850. Cette origine du temps est ce qu'on nomme l'*époque des Tables*; son choix est tout à fait arbitraire.

Les positions héliocentriques fournies par les Tables se trouvent, toutes, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyen de l'époque $1850 + t$; mais pour les déterminer, il a d'abord fallu les rapporter à un plan fixe arbitraire et à une droite fixe qui sont le plan de l'écliptique à l'origine du temps et la position moyenne de la ligne des équinoxes à la même époque. C'est de cette manière que les éléments e, ϖ, φ et θ des orbites des huit planètes principales ont été calculés pour des époques équidistantes de 500 ans depuis l'année 1850 jusqu'à l'année 3850 [a].

Les résultats que l'on a obtenu pour Jupiter sont les suivants [b]:

		e	ϖ	φ	θ
	1850....	9949",97	11°,54',53",10	1°,18',40",31	98°,54',20",5
	2350....	10120 ,29	13 , 0 , 3 ,96	1 ,18 , 6 ,51	99 ,48 , 4 ,9
[1]	2850....	10285 ,51	14 , 7 , 6 ,58	1 ,17 ,38 ,91	100 ,44 ,13 ,7
	3350....	10445 ,33	15 ,15 ,51 ,12	1 ,17 ,17 ,74	101 ,42 ,21 ,7
	3850....	10599 ,52	16 ,26 , 7 ,86	1 ,17 , 3 ,15	102 ,42 , 4 ,1

(a) Pour nous conformer à la notation des Tables, nous remplacerons la lettre ω, employée jusqu'ici pour désigner la longitude du périhélie, par celle ϖ; et nous désignerons, dans la suite, par ω' l'obliquité de l'écliptique.

(b) Le calcul de ces valeurs repose sur l'emploi des formules que nous avons données au chap. II du livre IV pour déterminer les *variations séculaires* des éléments e, ϖ, φ et θ; on doit y considérer les actions de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Saturne, Uranus et Neptune. En formant, pour

Digitized by Google

Ces valeurs ne sont point définitives: elles exigent deux corrections que nous déterminerons par la suite. La première tient compte des déplacements de l'écliptique et de la ligne des équinoxes, et ramène, par conséquent, l'inclinaison φ du plan de l'écliptique de 1850,0 à celle φ_1 de l'époque $1850 + t$, et les longitudes ϖ et θ à celles ϖ_1 et θ_1 qui se rapportent à l'équinoxe de la même époque; la seconde résulte de la comparaison de la théorie avec les observations et fournit les *valeurs corrigées* des éléments, valeurs sur lesquelles sont fondées les *Tables définitives* du mouvement des planètes. Nous reviendrons dans le chapitre V sur cette dernière correction qui s'applique indistinctement à tous les éléments de l'orbite.

II. — Déplacements séculaires de l'écliptique et de l'équateur. — Formules de réduction

Occupons-nous présentement de déterminer les changements que subissent les éléments e, ϖ, φ et θ, par suite des déplacements séculaires de l'écliptique et de l'équateur.

chaque époque considérée, la somme des variations séculaires correspondant à ces diverses actions, et ajoutant cette somme aux valeurs de e, ϖ... relatives à l'époque 1850 (celles-ci sont déterminées directement par les observations), on obtient les valeurs des mêmes éléments rapportées aux époques 2350, 2850, 3350 et 3850. Pour l'excentricité e, par exemple, on a

Variations séculaires totales de e

1850	2350	2850	3350	3850
0",00	170",32	335",54	495",36	649",55

En ajoutant donc successivement ces valeurs à celle 9949",97 qui répond à l'époque 1850,0, on formera la colonne du tableau [1] en tête de laquelle e est inscrit.

Digitized by Google

Soient (*fig.* 2) :

♈ E l'écliptique de 1850 ;

♈ la position de l'équinoxe moyen ;

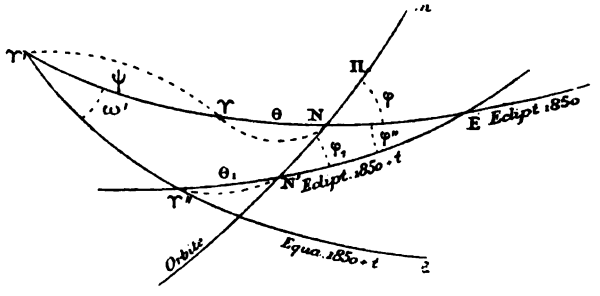
♈″E l'écliptique de 1850 + t ;

♈″ l'équinoxe à cette époque ;

♈′ε l'équateur de 1850 + t ;

N′m l'orbite elliptique de la planète m.

Fig. 2.



Nous supposerons que l'on connaisse en fonction du temps t ;

1° L'angle ♈E = θ'' et l'inclinaison ♈E♈″ = φ'', c'est-à-dire la position de l'écliptique de 1850 + t par rapport à l'écliptique de 1850 ;

2° L'angle θ et l'inclinaison φ qui définissent la position N′m du plan de l'orbite de Jupiter à l'époque 1850 ;

3° Les angles ψ et ω', c'est-à-dire la position de l'équateur de 1850 + t par rapport à l'écliptique de 1850.

Les quantités qu'il s'agira de déterminer seront alors : 1° l'angle θ_1, ou la longitude du nœud ascendant N′ de Jupiter sur l'écliptique mobile ♈″E ; 2° l'inclinaison φ_1 de son orbite sur le même plan ; et 3° l'angle $\theta_1 - \theta$ + NN′ ou la cor-

Digitized by Google

rection ♋ commune à la longitude moyenne et à celle du périhélie.

Considérons le triangle N'NE dans lequel

$$NE = \theta'' - \theta, \quad N'E = \theta''_1 - \theta_1{}^{(a)}, \quad \widehat{N'NE} = 180^\circ - \varphi.$$

Par les formules générales de la Trigonométrie sphérique, on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \cot(\theta''_1 - \theta_1)\sin(\theta'' - \theta) = \cos(\theta'' - \theta)\cos\varphi'' - \cot\varphi\sin\varphi'', \\ \sin NN'\sin\varphi = \sin(\theta''_1 - \theta_1)\sin\varphi'', \\ \sin\varphi_1\sin(\theta''_1 - \theta_1) = \sin(\theta'' - \theta)\sin\varphi. \end{cases}$$

Ainsi l'angle $(\theta''_1 - \theta_1)$ étant déterminé par la première de ces formules, les deux autres feront connaître NN' et φ_1.

On pourrait aussi déterminer $\theta''_1 - \theta_1$ et NN' au moyen des formules suivantes :

$$(1\,bis)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) + NN'] = \dfrac{\cos\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) - \varphi'']}{\cos\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) + \varphi'']}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'' - \theta), \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) - NN'] = \dfrac{\sin\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) - \varphi'']}{\sin\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) + \varphi'']}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'' - \theta), \end{cases}$$

et l'on aurait alors

$$\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) + NN'] + \frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) - NN'] = \theta''_1 - \theta_1,$$

$$\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) + NN'] - \frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) - NN'] = NN'.$$

(a) θ''_1 est représenté sur la figure par l'arc ♈'E.

Digitized by Google

Il reste à déterminer θ_1. Or, dans le triangle sphérique $\Upsilon'\Upsilon''E$, où $\Upsilon'E$ est égal à $\psi + \theta''$, on a

$$(2) \quad \cot\theta_1'' \sin(\theta'' + \psi) = \cot\omega' \sin\varphi'' + \cos(\theta'' + \psi)\cos\varphi'';$$

et comme l'angle $\theta_1'' - \theta_1$ est déjà connu par ce qui précède, on voit qu'il suffira de retrancher de cet angle la valeur de θ_1'' pour avoir θ_1. On pourra alors former l'angle $\theta_1 - \theta + NN'$ ou la correction ϑ commune à toutes les longitudes dans l'orbite.

Dans ces formules (1) et (2), les éléments θ'', φ'' et θ, φ se rapportent respectivement à la Terre et à Jupiter ; ils ont été calculés pour les cinq époques principales considérées par Le Verrier, et nous avons déjà rapporté au § I ceux de ces éléments qui sont relatifs à Jupiter. Quant aux valeurs de ψ et ω', on a pour les déterminer à l'époque $1850 + t$

$$(3) \quad \begin{cases} \psi = 50'',371\,40\,t - 0'',000\,108\,81\,t^2, \\ \omega' = 23^\circ,27',31'',83 + 0,000\,007\,19\,t^2. \end{cases}$$

III. — Application des formules précédentes

Calcul de l'angle $\theta_1'' - \theta_1$

Proposons-nous, comme application, de déterminer les valeurs de θ_1 et de φ_1 qui s'rapportent à l'époque 2850 ; celle de ϑ s'en déduira ensuite, comme nous l'avons vu, par une simple addition.

Digitized by Google

On a d'abord

$$\varphi = 1^\circ,17',38'',91, \qquad \theta = 100^\circ,44',13'',66,$$
$$\varphi'' = 0^\circ,\ 7',56'',49, \qquad \theta'' = 170^\circ,30',54,51.$$

On a ensuite par les formules (3) et en faisant $t = 1000$

$$\psi = 50371'',40 - 108'',81 = 13^\circ,57',42'',59,$$
$$\omega' = 23^\circ,27',31'',83 + 7'',19 = 23^\circ,27',39'',02.$$

On déduit de là

$$\theta'' + \psi = 184^\circ,28',37'',10.$$
$$\theta'' - \theta = 69^\circ,46',40'',85,$$

et la première des formules (1) donne alors

$$\log \cos(\theta'' - \theta) = 9.5386470$$
$$\log \cos \varphi'' = 9.9999988$$
$$\log \cos(\theta'' - \theta) \cos \varphi'' = 9.5386458$$
$$n.c. = + 0.3456573$$
$$\log \cot \varphi = 1.6460670$$
$$\log \sin \varphi'' = 7.3636281$$
$$\log \cot \varphi \sin \varphi'' = 9.0096951$$
$$n.\ c. = - 0.1022575$$
$$+ 0.3456573$$
$$- 0.1022575$$
$$\text{diff.} = 0.2433998$$
$$\log \text{diff.} = 9.3863205$$
$$- \log \sin(\theta'' - \theta) = 9.9723697$$
$$\log \cot(\theta_1'' - \theta_1) = 9.4139508$$
$$\theta_1'' - \theta_1 = 75^\circ,27',30'',98.$$

Digitized by Google

Par l'application de la formule (1 *bis*), on aurait

$$\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) - \varphi''] = 89^\circ.17'.12'',30,$$

$$\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) + \varphi''] \quad 89.25.\ 8,79,$$

$$\frac{1}{2}(\theta'' - \theta) = \ldots\ldots \quad 34.53.20,43\ ;$$

puis

$$\log\cos\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) - \varphi''] = 8.0951079$$

$$+\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'' - \theta) = 9.8434349$$

$$-\log\cos\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) + \varphi''] = 8.0059651$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) + NN'] = 9.9325777$$

$$\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) + NN'] = 40^\circ,34',13'',08$$

$$\log\sin\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) - \varphi''] = 9.9999664$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'' - \theta) = 9.8434349$$

$$-\log\sin\frac{1}{2}[(180^\circ - \varphi) + \varphi''] = 9.9999777$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) - NN'] = 9.8434236$$

$$\frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) - NN'] = 34^\circ,53',17'',90.$$

On aurait donc, comme ci-dessus,

$$\theta''_1 - \theta_1 = \frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) + NN'] + \frac{1}{2}[(\theta''_1 - \theta_1) - NN'] = 75^\circ,27',30'',98.$$

Digitized by Google

Détermination des angles θ_1, NN′ et φ_1

En appliquant la formule (2) aux données qui précèdent, on a pour déterminer l'angle θ_1''

$$\log \cot \omega' = 0.3625104$$
$$\log \sin \varphi'' = 7.3636282$$
$$\log \cot \omega' \sin \varphi'' = 7,7261386$$
$$n.c. = 0.0053228$$
$$\log \cos(\theta'' + \psi) = 9.9986729 \; -$$
$$\log \cos \varphi'' = 9.9999988$$
$$\log \cos(\theta'' + \psi) \cos \varphi'' = 9.9986717 \; -$$
$$n.c. = 0.9969462$$
$$-\,0,9969462$$
$$+\,0.0053228$$
$$\text{diff.} = -\,0.9916234$$
$$\log \text{diff.} = 9.9963468 \; -$$
$$\log \sin(\theta'' - \psi) = 8.8924198 \; -$$
$$\cot \theta_1'' = 1.1039270$$
$$\theta_1'' = 184°,30',3'',30\,;$$

d'où l'on conclut

$$\theta_1 = 109°,2',32'',32.$$

On a enfin par les deux dernières des formules (1)

$$\log \sin(\theta_1'' - \theta_1) = 9.9858652$$
$$\log \sin \varphi'' = 7.3636280$$
$$\log \sin(\theta_1'' - \theta_1) \sin \varphi'' = 7.3494932$$
$$-\log \sin \varphi = 8.3538222$$
$$\log \sin \text{NN}' = 8.9956710$$
$$\text{NN}' = \vartheta = 50°,40',55'',41.$$

Digitized by Google

$$\log \sin \varphi = 8.3538222$$
$$\log \sin (\theta'' - \theta) = 9.9723697$$
$$\log \sin \varphi \sin (\theta'' - \theta) = 8.3261919$$
$$- \log \sin (\theta''_1 - \theta) = 9.9858652$$
$$\log \sin \varphi_1 = 8.3403267$$
$$\varphi_1 = 1^\circ.15'.16'',35.$$

III. — Valeurs séculaires corrigées des éléments de l'orbite. — Réduction des angles φ, θ et ϖ a l'écliptique et a l'équinoxe mobiles.

La comparaison de la théorie avec les observations apporte aux valeurs des éléments e, ϖ... données dans le tableau [I] des corrections qui en modifient sensiblement les expressions. En rapprochant, en effet, les positions calculées des positions observées et cherchant à les faire concorder, on est conduit à attribuer aux valeurs provisoires des éléments les corrections suivantes :

$$\delta e = + 2'',69, \quad \delta\varpi = + 5'',31,$$
$$\delta\varphi = + 1''.06, \quad \delta\theta = + 1',56'',5.$$

On reconnaît, en outre, que la masse m' de Saturne doit subir la correction

$$\mu = - 0,005,$$

c'est-à-dire que la valeur $\frac{1}{3512}$ primitivement adoptée pour

Digitized by Google

cette masse doit être réduite à $\frac{1}{3529,56}$ ou diminuée de $\frac{1}{200}$. Ce changement dans la masse de Saturne modifie celles des variations séculaires qui dépendent de cette masse, et il suffit pour les réduire à leurs véritables valeurs de les multiplier par le rapport de la masse provisoire à la masse corrigée ou par la fraction

$$\frac{3512}{3529.6} = 0,995$$

Par cette double considération, les valeurs des éléments e, ϖ, φ et θ, données dans le tableau [I], deviennent :

		1850	2350	2850	3350	3850
	e	9952"66	10122,10	10286,46	10445,45	10598,84
[II]	ϖ	11°,54',58",41	12°,59,49,59	14,6,31,95	15,14,55,69	16,24,51.15
	φ	1,18,41,37	1,18,7,74	1,17,40,28	1,17,19,21	1,17,4,70
	θ	98,56,17,0	99,49,45,2	100,45,37,1	101,43,27,6	102,42,52.0

Maintenant si, avec ce nouveau système de *valeurs corrigées*, on reprend le calcul des éléments θ_1, φ_1 et ϑ, on trouve que la correction ϑ n'éprouve aucun changement ; mais les valeurs de φ_1 et de θ_1 subissent quelques altérations, et l'on a

		1850	2350	2850	3350	3850
	φ_1	1°,18',41",37	1,16,59,12	1,15,17,57	1,13,36,54	1,11,55,89
[III]	θ_1	98°,56',17",0	103,59,49,1	109,4,3,9	114,8,38,4	119,13,6.9
	ϑ	0°,0',0",00	6,59,8.75	13,59,14,31	21,0,13,49	28.2,3,94

Quant à la longitude ϖ du périhélie, on doit, pour la rapporter à l'écliptique de $1850 + t$ et à l'équinoxe de la même époque, ajouter à sa valeur rectifiée [II] la correction ϑ com-

Digitized by Google

mune aux longitudes dans l'orbite[a]. On obtient de la sorte aux cinq époques principales considérées

		1850	2350	2850	3350	3850
[IV]	ω_1	11°,54,58",41	19°,58',58",34	28,5,46,26	36,15,9,18	44,26,55,09

(a) En se reportant à la figure (2), on a

$$\varpi = \Upsilon N + N\Pi, \qquad \text{à l'époque } 1850{,}0,$$
$$\varpi_1 = \Upsilon'' N' + N' N + N\Pi, \text{ à l'époque } 1850 + t.$$

La correction qu'il faut ajouter à ϖ pour obtenir ω_1 est donc exprimée par

$$\vartheta = \Upsilon'' N' N - \Upsilon N = \theta_1 + N N' - \theta.$$

Digitized by Google

CHAPITRE II

Développement suivant les puissances du temps de la partie séculaire des éléments

---

I. — Représentation des valeurs de e, $\tilde{\omega}_1$, φ_1 et ϑ a l'aide d'une fonction dépendante du temps et pour une période de 500 ans.

Les valeurs des éléments e, $\tilde{\omega}_1$..., corrigées, comme nous venons de le dire, ont toute la précision des observations modernes; elles sont données pour cinq époques distantes entre elles de 500 ans et à partir de 1850. Mais pour la commodité du calcul numérique, il convient de représenter l'ensemble des valeurs de chacun des éléments par une fonction dépendante du temps et qui soit telle qu'on puisse la substituer avec rigueur à la variable considérée dans l'intervalle de 500 ans. Or c'est à quoi l'on arrive facilement au moyen de la formule suivante :

$$(\alpha) \quad \chi = \chi_0 + A\left(\frac{t}{500}\right) + B\left(\frac{t}{500}\right)^2 + C\left(\frac{t}{500}\right)^3 + D\left(\frac{t}{500}\right)^4 + \ldots,$$

Digitized by Google

formule dans laquelle

χ désigne l'une quelconque des variables considérées ;

χ_0 sa valeur à l'origine du temps;

Δ_1, Δ_2, Δ_3..., les différences successives qu'on en déduit, et A, B, C,... des coefficients tels que

$$A = \Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{3}\Delta_3 - \frac{1}{4}\Delta_4 + \ldots,$$

$$B = \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{2}\Delta_3 + \frac{11}{24}\Delta_4 - \ldots,$$

$$C = \frac{1}{6}\Delta_3 - \frac{1}{4}\Delta_4 + \ldots,$$

$$D = \frac{1}{24}\Delta_4 - \ldots.$$

Pour les valeurs particulières de χ que nous avons considérées, les différences Δ_3 sont toujours très petites et sensiblement constantes; on pourra donc, dans les applications, s'en tenir au terme en $C\left(\frac{t}{500}\right)^3$.

Supposons, par exemple, que l'on veuille représenter par une fonction de la forme (α), l'ensemble des valeurs de ϑ que nous avons rapportées à la page 379 pour les cinq époques fondamentales 1850, 2350..., 3850. En formant les différences Δ_1, Δ_2... on obtient

Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
+ 6°.59′. 8″.75	+ 56″.81	− 3″.19	+ 0″.84 ;
+ 7 . 0 . 5 .56	+ 53 .62	− 2 .35,	
+ 7 . 0 .59 .18	+ 51 .27,		
+ 7 . 1 .50 .45,			

Digitized by Google

par l'application de la formule (α), on a ensuite

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= 0^0.0'.0''.00 \\
A &= 25348''.75 - 28''.41 - 1''.01 - 0''.21 = 25119''.07, \\
B &= \quad 28''.405 + 1''.595 + 0''.385 = 30''.385, \\
C &= -0''.5317 - 0''.2100 = -0''.7417.
\end{aligned}$$

En écrivant pour plus de simplicité υ au lieu de $\left(\frac{t}{500}\right)$, on a donc

$$\vartheta = 50'',23814t + 30''.385\upsilon^2 - 0''.7417\upsilon^3.$$

On exprimerait de la même manière l'ensemble des valeurs de chacune des autres variables, et l'on aurait pour leurs *parties séculaires*

$$(A)\quad \begin{cases}
E_s = 9952'',66 + 171'',883\upsilon - 2'',395\upsilon^2 - 0'',048\upsilon^3, \\
\varpi_s = 11^\circ.54'.58''.41 + 57'',90321t + 90'',490\upsilon^2 - 2'',165\upsilon^3, \\
\varphi_1 = 1^\circ.18'.41''.37 - 0'',20320t + 0'',35\upsilon^2, \\
\theta_1 = 98^\circ.56'.17''.00 + 36'',36617t + 32''.85\upsilon^2 - 3'',83\upsilon^3.
\end{cases}$$

Ces expressions de E_s, ϖ_s... sont fondamentales. Nous nous occuperons dans les chapitres suivants de les réduire en Tables.

II. — Partie séculaire de la longitude moyenne L

La longitude moyenne L, comptée de l'équinoxe Υ'', a pour expression

$$L = nt + \varepsilon + \varepsilon' t^2 + pt + p' t^2.$$

Digitized by Google

Elle comprend :

1° La partie elliptique $nt + \varepsilon$ qui varie proportionnellement au temps ; 2° le terme $\varepsilon' t^2$ proportionnel au carré du temps et qui résulte des actions planétaires[a]; et 3° la quantité $p't + p't^2$ qu'on doit ajouter au moyen mouvement de la planète pour le rapporter à l'équinoxe moyen de $1850 + t$; cette dernière quantité n'est autre que la correction que nous avons désignée par ϑ.

La valeur corrigée de la longitude moyenne ε à l'époque 1850,0 étant supposée de

$$160^\circ.1'.10'',26$$

et le moyen mouvement annuel sidéral n de

$$109255'',63399$$

(a) Nous devons rappeler ici ce que nous avons dit à la fin du chapitre II, livre IV de la première partie.

Le moyen mouvement nt s'ajoute à ε pour former l'expression de la longitude moyenne l. Or comme dans le mouvement trouble ε est affecté de plusieurs inégalités séculaires, on doit, pour compléter l'expression de la longitude moyenne, y ajouter les termes en εt, $\varepsilon' t^2$... proportionnels au temps et au carré du temps ; et ainsi cette expression devient, abstraction faite des inégalités périodiques,

$$nt + \varepsilon + \varepsilon t + \varepsilon' t^2.$$

Le premier terme εt étant simplement proportionnel au temps et du premier ordre par rapport aux masses peut être négligé, parce qu'il s'ajouterait à nt dans l'expression de la longitude l; mais on doit retenir le second $\varepsilon' t^2$ qui, étant de l'ordre du carré des masses, produit dans ε et par suite dans l une véritable inégalité séculaire. Dans la théorie des planètes ce terme est toujours très peu sensible ; nous verrons en effet que, même pour Jupiter et Saturne, il ne s'élève pas au-delà de 0'',04.

Lorsqu'en laissant l'époque constante, on reporte sur nt la variation εt, on accroît ce moyen mouvement d'une quantité σ du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices, et la longitude moyenne $nt + \varepsilon$ ainsi modifiée est alors celle que donnent les observations. Pour tenir compte de cet accroissement, on doit, en calculant le demi-grand axe avec le moyen mouvement apparent, faire subir en a une correction δa, ainsi que nous le verrons dans le chapitre suivant.

Digitized by Google

on a pour la partie $l = nt + \varepsilon$ de la longitude moyenne, à l'époque t,

$$nt + \varepsilon = 160^\circ, 1', 10'', 26 + 109256'', 63399t.$$

La variation séculaire propre de la longitude moyenne, déterminée pour une période de 500 ans est, d'après la théorie de Jupiter,

$$- 0'', 000000165t^2 ;$$

en ayant égard à la correction de la masse de Saturne, on a donc

$$\varepsilon' t^2 = - 0''04125\upsilon^2 \times 0,995 = - 0'', 041\upsilon^2.$$

Enfin la quantité ϑ est égale comme on l'a vu à

$$50'', 23814t + 30'', 3850\upsilon^2 - 0'', 742\upsilon^3.$$

Il en résulte que la partie séculaire de la longitude moyenne L a pour expression

$$L_s = 160^\circ, 1, 10'', 26 + 109306'', 87213t + 30'', 344\upsilon^2 - 0'', 742\upsilon^3$$

t étant estimé en années juliennes.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Réduction à la forme tabulaire de la partie périodique des éléments

I. — Introduction des termes d'ordre supérieur dans les approximations. — Nature de ces termes

La variation d'un élément quelconque χ du mouvement elliptique peut être représentée, comme nous l'avons vu Livre II, Chap. III, par une équation différentielle de la forme

$$\text{(A)}\quad \frac{d\chi}{dt} = \mathcal{S} + \sum \mathfrak{N}_{(i)} \sin(i'l' - il) + \sum \mathfrak{N}_{(j)} \cos(i'l' - il) + \mathfrak{S}_s.$$

Cette équation comprend :

1° La partie séculaire $\mathcal{S}$ qui, ne contenant que les éléments elliptiques des planètes, varie avec une extrême lenteur ;

2° La partie $\mathfrak{N} \sin(i'l' - il) + \mathfrak{N}_1 \cos(i'l' - il) + \ldots$ qui renferme les longitudes moyennes l et l' des deux planètes considérées, ainsi que les éléments de leurs orbites. Chacun des termes de cette suite constitue, pour l'élément variable χ, une inégalité périodique dépendant de la configuration des planètes. Lorsqu'on accroît ces termes d'une inégalité de même nature, la variation de la partie périodique présente

Digitized by Google

des produits de sinus et de cosinus qui se transforment aisément en sommes; de plus, si les arguments sont les mêmes, il s'y joint un terme constant $\mathfrak{C}_r$ que l'on doit réunir aux termes séculaires proprement dits.

Remarquons, d'ailleurs, que chacun des termes qui expriment la variation des éléments elliptiques, comprend en facteur la masse du corps troublant.

Il en résulte que si les masses sont très petites, les inégalités périodiques le sont aussi, et qu'on peut, en les déterminant par l'intégration, regarder comme constants les éléments qui y entrent. Mais si les masses ne sont pas très petites, comme il arrive dans le cas de Jupiter et de Saturne, les résultats ainsi obtenus ne sont qu'approchés. Pour en obtenir de plus exact il faut, dans le second membre de l'équation ci-dessus, substituer aux éléments qui y figurent leurs valeurs augmentées de leurs perturbations périodiques déterminées par la première approximation. La variation de la partie séculaire $\mathcal{S}$ ne présente alors que des termes périodiques de même forme que dans le premier ordre, et la partie périodique $\mathfrak{N}\ \sin(i'l' - il) + \ldots$ donne, par sa variation, naissance à de nouveaux termes périodiques et à de nouveaux séculaires, dans lesquels entrent le carré des masses et leurs produits deux à deux.

L'équation différentielle (A) prend donc cette forme :

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \mathcal{S} + \sum \mathfrak{N}_{(i)} \sin(i'l' - il) + \sum \mathfrak{N}_{(j)} \cos(i'l' - il) \\ &\quad + \mathcal{S}' + \sum \mathfrak{N}'_{(i)} \sin(i'l' - il) + \sum \mathfrak{N}'_{(j)} \cos(i'l' - il); \end{aligned}$$

et l'on peut, en réunissant l'ensemble des termes séculaires $(\mathcal{S} + \mathcal{S}')$ à la somme des termes périodiques, traiter cette seconde équation comme la première.

Digitized by Google

S'il devenait nécessaire d'effectuer une troisième approximation, on le pourrait en procédant comme nous venons de le faire à l'égard de la seconde; on serait ainsi conduit à de nouveaux termes, les uns périodiques, les autres séculaires et dans lesquels entreraient nécessairement en facteurs les cubes des masses et les produits des trois dimensions de ces quantités.

Nous devons remarquer qu'en déterminant les inégalités périodiques par l'intégration des équations différentielles (A), on doit tenir compte des variations séculaires des éléments des orbites. Or, lorsqu'on a égard à cette influence, il s'introduit dans les approximations des termes périodiques d'ordre supérieur par rapport aux masses, qui sont surtout sensibles si les actions perturbatrices sont grandes. Dans la théorie de Jupiter et de Saturne, les termes de cette espèce affectent particulièrement les parties périodiques de la longitude moyenne, de la longitude du périhélie et du demi-grand axe des orbites; et leur considération rend particulièrement difficultueuses les théories de ces deux planètes.

II. — Intégration des équations différentielles (A)

Revenons aux équations différentielles (A) dont l'ensemble représente les variations des éléments des orbites de m et de m'.

Ces équations n'étant intégrables par aucune des méthodes connues, on a dû en chercher la solution par un développement en séries.

Soient, en n'ayant d'abord égard qu'à la partie séculaire de

Digitized by Google

ces différentielles,

$$(1)\quad \frac{da}{dt} = \mathcal{S}, \qquad \frac{de}{dt} = \mathcal{S}', \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \mathcal{S}''\ldots$$

Ces équations du premier ordre expriment, chacune, une relation entre les éléments $a, e, \varepsilon\ldots$ qui entrent dans la formation de leurs seconds membres. Par des différentiations successives, on pourra donc en déduire les valeurs des dérivées

$$\frac{d^2a}{dt^2}, \frac{d^2e}{dt^2}\ldots, \qquad \frac{d^3a}{dt^3}, \frac{d^3e}{dt^3}\ldots$$

indéfiniment exprimées en fonctions des mêmes éléments.

Cela étant, supposons que les éléments qui entrent dans ces diverses dérivées aient été remplacés par leurs valeurs à une époque arbitraire t_0 : alors on aura pour l'époque quelconque t

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a = a_0 + \mathcal{S}_0\,(t - t_0) + \left(\dfrac{d\mathcal{S}_0}{dt}\right)_0 \dfrac{1}{2}(t - t_0)^2 + \ldots, \\ e = e_0 + \mathcal{S}'_0\,(t - t_0) + \left(\dfrac{d\mathcal{S}'_0}{dt}\right)_0 \dfrac{1}{2}(t - t_0)^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Et ces expressions, où les coefficients $\frac{d\mathcal{S}_0}{dt}, \frac{d\mathcal{S}'_0}{dt}\ldots$ ont des valeurs toujours fort petites, seront des intégrales très approchées des équations différentielles proposées (1).

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{d\chi}{dt} = \mathfrak{N}\sin(i'l' - il) + \mathfrak{N}_1\cos(i'l' - il) + \ldots$$

qui se rapporte à la partie périodique des différentielles des

Digitized by Google

éléments et où nous supposerons que les coefficients $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$... varient très lentement en raison des inégalités séculaires.

En intégrant par parties cette dernière équation, et faisant pour abréger $\zeta = i'l' - il$, $\sigma = i'n' - in$, on aura

$$\chi = -\frac{\mathfrak{N}}{\sigma}\cos\zeta + \frac{\frac{d\mathfrak{N}}{dt}}{\sigma^2}\sin\zeta + \frac{\frac{d^2\mathfrak{N}}{dt^2}}{\sigma^3}\cos\zeta - \ldots$$

$$+ \frac{\mathfrak{N}_1}{\sigma}\sin\zeta + \frac{\frac{d\mathfrak{N}_1}{dt}}{\sigma^2}\cos\zeta - \frac{\frac{d^2\mathfrak{N}_1}{dt^2}}{\sigma^3}\sin\zeta - \ldots$$

ou

$$(3)\quad \begin{aligned} \chi = &\left\{ \frac{\mathfrak{N}_1}{\sigma^2} + \frac{\frac{d\mathfrak{N}}{dt}}{\sigma^2} - \frac{\frac{d^2\mathfrak{N}_1}{dt^2}}{\sigma^3} - \cdots \right\}\sin\zeta \\ &+ \left\{ -\frac{\mathfrak{N}}{\sigma} + \frac{\frac{d\mathfrak{N}_1}{dt}}{\sigma^2} + \frac{\frac{d^2\mathfrak{N}}{dt^2}}{\sigma^3} - \cdots \right\}\cos\zeta. \end{aligned}$$

L'élément ρ dépend de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \mathfrak{M}\sin(i'l' - il) + \mathfrak{M}_1\cos(i'l' - il) + \ldots$$

En procédant comme nous venons de le faire à l'égard de χ, on en déduira pour l'expression de ρ développée en séries :

$$\rho = \left\{ -\frac{\mathfrak{M}}{\sigma^2} + \frac{\frac{2d\mathfrak{M}_1}{dt}}{\sigma^3} + \frac{\frac{3d^2\mathfrak{M}}{dt^2}}{\sigma^4} - \cdots \right\}\sin\zeta$$

$$\left\{ -\frac{\mathfrak{M}_1}{\sigma^2} - \frac{\frac{2d\mathfrak{M}}{dt}}{\sigma^3} + \frac{\frac{3d^2\mathfrak{M}_1}{dt^2}}{\sigma^4} + \cdots \right\}\cos\zeta.$$

Les coefficients $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$... qui entrent dans l'expression générale de χ, sont, comme ceux $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$..., des fonctions des divers

Digitized by Google

éléments des orbites. En ayant donc recours aux équations (1), il sera facile d'en former les dérivées successives. Il faudra ensuite pour rendre la formule (3) effective, y substituer à la place des éléments a, e, ε..., que renferment ces coefficients et ces dérivées, leurs valeurs séculaires à l'époque t. Or c'est ce que l'on pourra toujours faire à l'aide des formules (2) que nous venons d'écrire.

III. — Parties périodiques de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du périhélie

Les inégalités périodiques qui affectent la longitude moyenne de Jupiter sont, en premier lieu, les inégalités à longue période dépendant des arguments

$$5l^{v} - 2l^{iv} = V, \quad 2(5l^{v} - 2l^{iv}) = 2V, \quad 2l^{iv} + 3l^{vi} - 6l^{v} = W^{(a)};$$

et, en second lieu, l'ensemble des termes périodiques dus aux actions des planètes perturbatrices. Toutefois, comme les actions directes des planètes Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune, sont très faibles, Le Verrier se contente d'appliquer aux valeurs des coordonnées v et r, calculées à l'aide des formules du mouvement elliptique, les corrections δv et δr par lesquelles il est tenu compte de ces actions. Mais il ap-

(a) Cette inégalité qui dépend de deux fois le moyen mouvement de Jupiter, plus trois fois le moyen mouvement d'Uranus, moins six fois le moyen mouvement de Saturne devient sensible à cause de la petitesse de l'angle

$$2n^{v} + 3n^{vi} - 6n^{v} = 813'',61$$

et surtout parce qu'elle est d'un ordre peu élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Digitized by Google

plique directement à la longitude moyenne et aux autres éléments de l'orbite, l'ensemble des termes périodiques qui résultent de l'action de Saturne. En désignant par l^{v} la longitude moyenne de cette planète, comptée à partir de l'équinoxe du 1er janvier 1850, et par l^{iv} la même quantité relative à Jupiter, on a, pour représenter l'ensemble des termes dont nous parlons,

$$(1) \qquad L_{p_1} = \sum S_i \sin i l^{v} + \sum C_i \cos i l^{v};$$

S_i et C_i sont des coefficients fonctions seulement de $\zeta = l^{v} - l^{iv}$, et i un nombre entier qui devient successivement égal à 1.2...5 dans la première somme et à 0, 1, 2... 5 dans la seconde.

Quand aux inégalités à longues périodes dont les arguments sont V, 2V et W, elles ont respectivement pour expressions :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} L_{p_2} &= M \sin V + N \cos V, \\ L_{p_3} &= M_1 \sin 2V + N_1 \cos 2V, \\ L_{p_4} &= M_2 \sin W + N_2 \cos 2W, \end{aligned} \right.$$

M, N, M_1, N_1... étant des coefficients fonctions du temps, dont nous développerons plus loin les expressions.

L'ensemble de tous ces termes, c'est-à-dire la somme des quatre fonctions (1) et (2), constitue la partie périodique totale L_p de la longitude moyenne de Jupiter. On a ainsi :

$$(a) \qquad L_p = L_{p_1} + L_{p_2} + L_{p_3} + L_{p_4}.$$

On aurait semblablement pour les perturbations pério-

Digitized by Google

diques totales de l'excentricité E et de la partie ($E\delta\tilde{\omega}$)

$$(b)\quad \begin{cases} E_p = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} + E_{p_4}, \\ E\delta\tilde{\omega}_p = E\,(\delta\tilde{\omega}_{p_1} + \delta\tilde{\omega}_{p_2} + \delta\tilde{\omega}_{p_3} + \delta\tilde{\omega}_{p_4}), \end{cases}$$

expressions dans lesquelles E_{p_1}, E_{p_2}... $E\delta\tilde{\omega}_{p_1}$... désignent des fonctions analogues à celles (1) et (2) [a].

En divisant $E\delta\tilde{\omega}_p$ par la partie séculaire de l'excentricité, c'est-à-dire par la valeur E_s que nous avons donnée page 383, on en conclura la variation périodique totale de la longitude du périhélie ou $\delta\tilde{\omega}_p$.

IV. — Inégalités périodiques du demi-grand axe

Le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter comprend : 1° la constante $a = 5.202800$ déduite du moyen mouvement *observé* n ; 2° la somme des inégalités à longues périodes dépendant des angles V et 2V ; et 3° l'ensemble des termes périodiques dus à l'action de Saturne. Ces diverses perturbations sont représentées par des expressions semblables à celles (1) et (2) données dans le paragraphe qui précède.

Relativement à la constante que nous avons désignée par a, nous ferons remarquer que cette quantité ne correspond point au moyen mouvement elliptique n défini par la

(a) Dans la réduction en Tables des différents termes dont se composent les expressions (a) et (b), tous les coefficients qui y figurent ont été multipliés par 0,995, afin de tenir compte de la correction que la comparaison de la théorie de Jupiter avec les observations a apportée à la valeur provisoirement admise pour la masse de Saturne (Voyez chap. I, § III).

Digitized by Google

relation

$$(\alpha) \qquad a^3 n^2 = 1 + m.$$

Sous l'influence des actions perturbatrices, le moyen mouvement apparent $\mathfrak{n}$ diffère un peu du moyen mouvement elliptique n ; et l'accroissement $\delta\mathfrak{a}$ qui en résulte pour $\mathfrak{a}$ est la correction qu'il faut appliquer à cette quantité pour avoir la vraie valeur de la constante du demi-grand axe. Nous allons nous occuper de la déterminer.

Soient σ la quantité dont s'accroît n, par suite des perturbations et $\mathfrak{n}$ le moyen mouvement apparent de la planète, c'est-à-dire tel qu'il résulte des observations ; $\mathfrak{n} - \sigma$ sera le moyen mouvement qui correspond à a ou à $\mathfrak{a} + \delta\mathfrak{a}$, et l'on aura en vertu de la relation (α)

$$a^3 (\mathfrak{n} - \sigma)^2 = 1 + m.$$

On a d'ailleurs entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ et m

$$(1) \qquad \mathfrak{a}^3 \mathfrak{n}^2 = 1 + m ;$$

d'où

$$a^3 (\mathfrak{n} - \sigma)^2 = \mathfrak{a}^3 \mathfrak{n}^2 ;$$

par conséquent

$$(2) \qquad a = \mathfrak{a} \left(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n} - \sigma}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

En négligeant le terme en σ^2 qui est de l'ordre du carré de la masse perturbatrice, on a donc

$$(2) \qquad a = \mathfrak{a} + \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\mathfrak{n}} \mathfrak{a}.$$

Ainsi la correction que l'on doit appliquer à $\mathfrak{a}$ pour tenir

Digitized by Google

compte de l'erreur commise en employant, dans le calcul du demi-grand axe, $\mathfrak{n}$ au lieu de n, est exprimée par

$$(3) \qquad \delta\mathfrak{a} = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}.$$

Comparons maintenant l'équation (1) avec celle analogue

$$(4) \qquad \mathfrak{a}'^3\mathfrak{n}'^2 = 1 + m'$$

qui a lieu pour la Terre; les éléments $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ et m sont ici marqués d'un accent.

En divisant ces deux formules l'une par l'autre, on en déduit

$$\frac{\mathfrak{a}^3}{\mathfrak{a}'^3} = \frac{\mathfrak{n}'^2}{1+m'}\frac{1+m}{\mathfrak{n}^2};$$

par suite, on a

$$(5) \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\frac{\mathfrak{n}'^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{1+m'}}\frac{\sqrt[3]{1+m}}{\mathfrak{n}^{\frac{2}{3}}}.$$

Comme pour a, on a d'ailleurs

$$(6) \qquad a' = \mathfrak{a}' + \frac{2}{3}\frac{\sigma'}{\mathfrak{n}'}\mathfrak{a}'.$$

L'unité de distance étant arbitraire, on peut supposer

$$\mathfrak{a}' = 1 = \frac{\sqrt[3]{1+m'}}{\mathfrak{n}'^2},$$

ce qui donne

$$(7) \qquad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{n}'^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{1+m'}}\frac{\sqrt[3]{1+m}}{\mathfrak{n}^{\frac{2}{3}}}.$$

Digitized by Google

Ainsi

$$a' = 1 + \frac{2}{3}\frac{\sigma'}{n'}. \tag{8}$$

Si l'on adopte pour n' et σ' les nombres suivants donnés par Le Verrier :

$$n' = 1295977'',38, \quad \sigma' = 2'',507, \quad m' = \frac{1}{320000},$$

on trouve

$$\log \frac{2}{3}\frac{\sigma'}{n'} = 4.1104656$$

et

$$\delta a' = 0,00000129.$$

Le demi-grand axe a' a donc pour valeur

$$a' = 1.00000129,$$

et il correspond alors à l'orbite d'une planète fictive qui ne serait soumise qu'à l'action du Soleil, et dont le moyen mouvement serait égal à celui de la Terre.

Digitized by Google

CHAPITRE IV

Méthode suivie par Le Verrier dans la détermination des perturbations des coordonnées héliocentriques

---

I. — Perturbations de la longitude vraie et du rayon vecteur

Au lieu de déterminer directement les perturbations des coordonnées v, et r, on peut, lorsque les actions perturbatrices sont grandes, les déduire immédiatement des formules du mouvement elliptique ; mais alors les éléments de l'orbite doivent y être remplacés par leurs valeurs affectées des inégalités périodiques et des inégalités séculaires à l'époque considérée.

Soient donc à une époque donnée t

$$(1) \qquad \begin{cases} L = L_s + L_p, \\ e = e_s + e_p, \\ a = a + \delta a_p, \\ \varpi = \varpi_s + \varpi_p ; \end{cases}$$

on aura pour calculer la longitude v dans l'orbite troublée

Digitized by Google

et le rayon vecteur v correspondant

$$(2)\quad \begin{cases} nt + \varepsilon - \tilde{\omega} = u - e \sin u = \mathrm{L} - \tilde{\omega} = \zeta, \\ r = a\,(1 - e \cos u), \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - \tilde{\omega}) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u. \end{cases}$$

Et comme les éléments L, e, $\tilde{\omega}$ et a ne sont pas affectés, dans leurs parties périodiques, des termes provenant de l'action des planètes inférieures, on devra, après avoir déterminé v et r au moyen des formules (1) et (2), ajouter aux valeurs de ces coordonnées les variations δv et δr, telles qu'elles résultent des expressions que nous avons données au chapitre IV du livre IV.

Aux deux dernières des formules (2), on pourrait substituer les suivantes démontrées page 165 :

$$(3)\quad \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}(v - \tilde{\omega}) = \sqrt{a\,(1+e)} \sin \frac{1}{2} u, \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2}(v - \tilde{\omega}) = \sqrt{a\,(1-e)} \cos \frac{1}{2} u. \end{cases}$$

On pourrait aussi prendre pour l'expression de r

$$(4)\qquad r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos (v - \tilde{\omega})}.$$

Si, après avoir déterminé les perturbations périodiques de L, e, $\tilde{\omega}$ et a, dues à l'action de Saturne, on voulait passer directement de l'anomalie moyenne $\zeta = \mathrm{L} - \tilde{\omega}$ à la longitude vraie v, on le pourrait en calculant l'équation du centre $\mathcal{E}$

Digitized by Google

par la formule

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = &\left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \ldots\right)\sin\zeta \\ &+ \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \ldots\right)\sin 2\zeta \\ &+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \ldots\right)\sin 3\zeta \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

donnée page 97 ; et l'on aurait alors

$$v = \mathrm{L} + \mathcal{E}.$$

Dans ce cas, le rayon vecteur r serait déterminé par la formule

$$r = \frac{a\,(1 - e^2 \sin^2 1'')}{1 + e \sin 1'' \cos (v - \tilde{\omega})}.$$

II. — Perturbations de la latitude

La latitude s au-dessus du plan de l'orbite est donnée par la formule très simple

$$(1) \qquad \sin s = \sin \varphi\,(v - \theta).$$

Cette formule a lieu dans l'ellipse invariable ; on l'appliquerait au cas du mouvement troublé, en y substituant pour φ et θ les valeurs de ces variables affectées de leurs inégalités tant périodiques que séculaires à l'époque donnée t. Toutefois, comme les perturbations sont ici très petites, il sera préférable de n'introduire dans la formule (1), à la place de φ et θ, que les

Digitized by Google

valeurs séculaires de ces éléments, sauf à déterminer ensuite directement les inégalités périodiques de la latitude. C'est du moins de cette manière que Le Verrier a procédé dans sa théorie de Jupiter et de Saturne. En désignant par φ_1 et θ_1 les parties séculaires de l'inclinaison et du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter, on aura donc pour l'expression complète de s

$$(2) \qquad \sin s = \sin \varphi_1 \sin (v - \theta_1) + \delta s.$$

La partie δs qui représente l'ensemble des termes périodiques dus à l'action de Saturne [a], se déduit de la formule (1) par une simple différentiation. On a, en effet, par les variations $\delta\varphi$ et $\delta\theta$ de φ et θ

$$(3) \qquad \delta s = \cos \varphi \sin (v - \theta)\, \delta\varphi - \cos (v - \theta) \sin \varphi \delta\theta.$$

En remplaçant, dans cette formule, v par sa valeur

$$l + 2e \sin (l - \tilde{\omega}),$$

développant les sinus et cosinus ; puis réunissant les termes semblables, on sera conduit à une expression procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l' et de $\zeta = l' - l$, et l'on pourra alors, passant à la forme tubulaire, poser

$$(4) \qquad \delta s = \sum S_i \sin i l' + \sum C_i \cos i l'.$$

Les coefficients S_1, S_2, S_3 ; $C_0 .. C_3$ étant des fonctions de ζ seul, seront donnés par une Table à simple entrée.

(a) L'influence des termes dus aux actions des autres planètes est insensible.

Digitized by Google

III. — Perturbations de la longitude projetée v_1

Connaissant la longitude vraie v, on en conclura la longitude réduite à l'écliptique ou la longitude héliocentrique v_1 par la formule

$$(1) \qquad \operatorname{tang}(v_1 - \theta_1) = \cos\varphi_1 \operatorname{tang}(v - \theta_1),$$

φ_1 et θ_1 étant les parties séculaires de φ et de θ.

Comme l'inclinaison φ est toujours une très petite quantité, on peut, si on le désire, déduire v_1 de v, en calculant directement la réduction à l'écliptique déterminée par la formule [a]

$$(2) \qquad \rho = -\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi_1}{\sin 1''} \sin 2(v - \theta_1) + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2}\varphi_1}{\sin 2''} \sin 4(v - \theta_1);$$

et l'on a alors

$$(3) \qquad v_1 = v + \rho + \delta\rho,$$

$\delta\rho$ étant la très petite correction que l'on doit appliquer à v_1 pour tenir compte de ce que, dans la formule (2), on a introduit, non pas les valeurs complètes de φ et θ, mais seulement leurs parties séculaires. Cette correction est représentée analytiquement par l'expression

$$\delta\rho = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi_1 \sin 2(v - \theta_1)\,\delta\varphi_1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi_1 \sin\varphi_1 \cos 2(v - \theta_1)\,\delta\theta_1,$$

(a) Voyez notre *Traité d'Astronomie pratique*, partie II, chapitre III.

Digitized by Google

que l'on déduit du premier terme de la formule (2), en le différentiant par rapport à φ_1 et à θ_1.

Si les perturbations périodiques de l'inclinaison et de la longitude du nœud étaient grandes, il serait préférable, dans le calcul de l'une et l'autre des formules (1), (2), d'employer $\varphi_1 + \varphi_p$ et $\theta_1 + \theta_p$ au lieu de φ_1 et θ_1 ; et on aurait alors rigoureusement

$$v_1 = v + \rho.$$

Digitized by Google

CHAPITRE V

Formation des Tables définitives du mouvement des Planètes. — Comparaison de la théorie avec les observations.

I. — Équations de condition en longitude et en latitude

Les Tables planétaires font connaître les longitudes et les latitudes des planètes, telles qu'elles seraient vues du centre du Soleil. Pour pouvoir comparer ces longitudes et ces latitudes héliocentriques à celles déduites de l'observation et qui sont géocentriques, il faut d'abord convertir par le calcul les ascensions droites et les déclinaisons observées en longitudes et en latitudes géocentriques, puis transformer ces dernières, corrigées de l'aberration et de la nutation, en longitudes et latitudes héliocentriques.

Soient alors v_0 la longitude héliocentrique d'une planète déduite de l'observation, et v_c le même élément donné par les Tables. Si les Tables étaient exactes et les observations exemptes d'erreurs, on devrait avoir $v_0 = v_c$; mais comme, en général, il y a toujours une différence entre ces deux lon-

Digitized by Google

gitudes, on a

$$v_c = v_0 + \delta v_c,$$

et par conséquent

$$(1) \qquad \delta v_c = v_c - v_0.$$

Pareillement, on aurait entre la latitude observée s_0 et la latitude calculée s_c, la relation

$$(2) \qquad \delta s_c = s_c - s_0.$$

Les variations δv_c et δs_c résultent des corrections que l'on a fait subir aux éléments qui entrent dans la formation des expressions de v et de s ; on les regarde comme exprimant les *erreurs des Tables* en longitude et en latitude.

Supposons maintenant que l'on ait rassemblé un certain nombre d'observations faites par des observateurs habiles et embrassant un intervalle de temps aussi grand que possible. Appelons $l = nt + \varepsilon$ la longitude moyenne de la planète m, $\zeta = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$ son anomalie moyenne et soit $\sum m^{(i)}\eta^{(i)}$ l'ensemble des perturbations (exprimées en secondes) que la planète m éprouve de la part des autres planètes m', m''... En négligeant, dans l'équation du centre, les puissances de l'excentricité supérieures à la seconde, on aura

$$(3) \qquad v_c = nt + \varepsilon + 2e \sin\zeta + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\zeta + \sum m^{(i)}\eta^{(i)}.$$

Posons

$$\delta v_c = \frac{dv_c}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{dv_c}{dn}\delta n + \frac{dv_c}{de}\delta e + \frac{dv_c}{ed\tilde{\omega}} e\delta\tilde{\omega};$$

en différentiant l'équation (3) par rapport à l, n... et en y re-

Digitized by Google

gardant t, $2e$ et $\mathfrak{p}^{(i)}$ comme constants, on en déduira

$$\frac{dv_c}{de} = 1 + 2e\cos\zeta, \qquad \frac{dv_c}{dn} = (1 + 2e\cos\zeta)\,t,$$

$$\frac{dv_c}{de} = 2\sin\zeta + \frac{5}{2}e\sin 2\zeta, \qquad \frac{dv_c}{ed\tilde{\omega}} = -2\cos\zeta - \frac{5}{2}e\cos 2\zeta.$$

On aura donc pour l'équation de condition en longitude qu'il s'agissait de former

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \delta v_c = {} & (1 + 2e\cos 2\zeta)\,\delta\varepsilon + (1 + 2e\cos\zeta)\,t\delta n \\ & + \left(2\sin\zeta + \frac{5}{2}e\sin 2\zeta\right)\delta e - \left(2\cos\zeta + \frac{5}{2}e\cos 2\zeta\right)e\delta\tilde{\omega} \\ & + \sum \mathfrak{p}^{(i)}\delta m^{(i)} = v_c - v_0. \end{aligned}\right.$$

Relativement à l'équation en latitude, on aura, en désignant par φ l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan de l'écliptique et par θ la longitude de son nœud ascendant

$$s_c = \sin\varphi\,\sin(v - \theta);$$

on a d'ailleurs

$$\delta s_c = \frac{ds_c}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{ds_c}{d\theta}\delta\theta,$$

et

$$\frac{ds_c}{\delta\varphi} = \cos\varphi\,\sin(v - \theta), \quad \frac{ds_c}{d\theta} = -\sin\varphi\,\cos(v - \theta);$$

par conséquent

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} \delta s_c = {} & \cos\varphi\,\sin(v - \theta)\,\delta\varphi \\ & - \sin\varphi\,\cos(v - \theta)\,\delta\theta = s_c - s_0. \end{aligned}\right.$$

Ces *équations de condition* (a) et (b) entre les corrections δn, $\delta\varepsilon$, δe, $\delta\tilde{\omega}$, $\delta m^{(i)}$ et $\delta\varphi$, $\delta\theta$ des éléments elliptiques sont les

Digitized by Google

plus générales que l'on puisse former. Chaque observation de la longitude et de la latitude donnant lieu à des équations semblables, la résolution de toutes ces équations fera connaître les valeurs des indéterminées δn, $\delta \varepsilon$..., valeurs qui seront les corrections à appliquer aux éléments de l'orbite elliptique pour passer des *Tables provisoires* (c'est-à-dire uniquement fondées sur les données de la théorie) aux *Tables définitives*.

On pourrait évidemment suivre une marche inverse à celle que nous venons d'exposer, et se proposer de déterminer les corrections que doivent recevoir les éléments de l'orbite elliptique pour que les positions observées $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{D}_0$ concordent exactement avec les positions calculées $\mathcal{A}_c$ et $\mathcal{D}_c$, ou pour que les différences $\mathcal{A}_c - \mathcal{A}_0$ et $\mathcal{D}_c - \mathcal{D}_0$, entre le calcul et l'observation, soient nulles. Mais il est évident que les équations de condition que l'on formerait de cette manière seraient bien moins simples que les précédentes.

II. — Résolution des équations de condition. — Principe de la méthode des moindres carrés

Si les observations étaient rigoureusement exactes, il suffirait, en général, d'un nombre d'équations égal au nombre des inconnues pour déterminer les valeurs de ces arbitraires. Mais comme les observations ne comportent pas une exactitude absolue, qu'elles sont toujours entachées d'une certaine erreur, on est obligé, pour suppléer à leur imperfection, d'en augmenter beaucoup le nombre. On est ainsi conduit à un système d'équations en nombre bien supérieur à celui des incon-

Digitized by Google

nues, et la question consiste alors à combiner toutes ces équations de manière à en déduire les valeurs les plus probables des inconnues.

Soient x, y, z.. les corrections encore inconnues des éléments et $a, b, c, \ldots a_1, b_1, c_1, \ldots$ des constantes numériques déduites de l'observation et que nous supposerons exemptes d'erreur ; on aura pour les équations de condition qui déterminent x, y, z..

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots, \\ \varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots, \\ \varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.. étant les erreurs commises dans les observations successives, erreurs qu'il s'agit de rendre aussi petites que possible.

Or, d'après une règle donnée par Legendre et confirmée depuis par les Recherches de Gauss et de Laplace, on satisfait de la manière la plus avantageuse à cette condition, en déterminant les corrections x, y, z... de manière que la somme des carrés des erreurs $\varepsilon, \varepsilon_1$... soit un *minimum*.

En désignant par $\sum (\varepsilon^2)$ cette somme, on devra donc avoir

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d \sum (\varepsilon^2)}{dx} = 0, \\ \dfrac{d \sum (\varepsilon^2)}{dy} = 0, \\ \dfrac{d \sum (\varepsilon^2)}{dz} = 0, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Digitized by Google

Posons pour abréger

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots = \sum (a^2),$$

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots = \sum (ab),$$

. . . . . .

En développant, dans les équations (1), les carrés des seconds membres et les ajoutant ensemble, on aura

$$\sum (\varepsilon^2) = \sum (a^2)\, x^2 + 2 \sum (ab)\, xy + 2 \sum (ac)\, xz$$
$$+ 2 \sum (bc)\, yz + \sum (b^2)\, y^2 + \sum (c^2)\, z^2 + \ldots$$

et les équations (2) donneront alors

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \sum (a^2) + y \sum (ab) + z \sum (ac) + \ldots = 0, \\ x \sum (ab) + y \sum (b^2) + z \sum (bc) + \ldots = 0, \\ x \sum (ac) + y \sum (bc) + z \sum (c^2) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Ces relations sont ce que Gauss appelle les *équations normales* du problème ; elles sont du premier degré et en nombre égal à celui des inconnues. En les résolvant par les procédés ordinaires d'élimination, on pourra donc en déduire les valeurs de ces inconnues.

La méthode que nous venons d'exposer, et qui porte le nom de *Méthode des moindres carrés*, est la plus avantageuse de toutes celles que l'on pourrait employer pour la résolution des équations de condition : elle offre un moyen sûr et direct

Digitized by Google

de parvenir aux valeurs les plus probables des inconnues que l'on cherche. Son seul défaut est la longueur souvent excessive des calculs dans lesquels elle entraîne ; mais cet inconvénient est bien compensé par ses avantages.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les relations qui lient les grandeurs observées aux inconnues étaient de forme linéaire. En général, cela n'a pas lieu et les équations que l'on a à considérer sont ou transcendantes ou bien d'un degré supérieur au premier. Mais dans les applications, il est toujours possible de ramener ce second cas au premier, en déterminant des valeurs convenablement approchées des inconnues x, y, z... Soient :

$$(a) \qquad \begin{aligned} &F\ (x, y, z \ldots) = 0, \\ &F_1\ (x, y, z \ldots) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les équations en nombre n qu'il s'agit de résoudre. Si au moyen de m de ces équations, on détermine les m inconnues x, y, z... et qu'on désigne par η, θ, ζ les valeurs ainsi trouvées, ces dernières quantités seront des valeurs approchées des inconnues. Or, si l'on appelle δx, δy, δz les erreurs dont chacune d'elles est affectée, et qu'on substitue, partout, dans les relations (a), $\eta + \delta x$ à x, $\theta + \delta y$ à y...; puis qu'on développe les premiers membres par la série de Taylor, on aura :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &F\ (\eta, \theta, \zeta \ldots) + \frac{dF}{d\eta}\delta x + \frac{dF}{d\theta}\delta y + \frac{dF}{d\zeta}\delta z \ldots = 0, \\ &F_1\ (\eta, \theta, \zeta \ldots) + \frac{dF_1}{d\eta}\delta x + \frac{dF_1}{d\theta}\delta y + \frac{dF_1}{d\zeta}\delta z \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

pourvu que les corrections δx, δy, δz... soient assez petites

Digitized by Google

pour qu'il soit permis d'en négliger les puissances supérieures.

Ces dernières équations (b) seront alors linéaires par rapport à δx, δy..., et en les combinant par la méthode des moindres carrés, on pourra en déduire les valeurs les plus probables de ces inconnues.

Digitized by Google

LIVRE II

CONSTRUCTION DES TABLES DU MOUVEMENT DE JUPITER

CHAPITRE I

Disposition générale des Tables planétaires

I. — Tables a simple et a double entrée

Les Tables astronomiques sont particulièrement destinées à faire connaître la suite des valeurs que prend une fonction $v = F(\zeta)$, lorsqu'on donne des valeurs successives à la variable ζ qu'elle renferme. Une Table disposée d'après cette formule ne contient qu'un seul argument ζ et est dite à *simple entrée*. Elle comprend, dans une première colonne, les valeurs consécutives que l'on attribue à ζ et, dans une seconde colonne, les valeurs correspondantes de la fonction v. Par exemple, si la fonction v désigne le logarithme de ζ, en faisant successivement ζ égal à 1, 2, 3... et en calculant les valeurs correspondantes de v, on formera une Table de logarithmes dans laquelle le nombre donné sera l'*argument* de la Table.

Très souvent la fonction $F(\zeta)$ contient plusieurs termes que la nature même de cette fonction rend indépendants entre eux. La Table dépend toujours d'un seul argument ; mais elle

Digitized by Google

contient plusieurs colonnes où se trouvent, pour un même argument donné, les valeurs correspondantes de chaque terme de la fonction $F(\zeta)$. Dans ce cas, on obtient la valeur complète de cette fonction, en réunissant les termes des différentes colonnes dont se compose la Table, après que toutes les opérations indiquées ont été effectuées.

Au lieu d'une seule variable ζ, on a quelquefois à considérer deux arguments ζ et ζ_1 ; la Table se rapporte alors à l'équation

$$v = F(\zeta, \zeta_1)$$

et est dite à *double entrée*. Dans une première colonne, on trouve les valeurs successives que l'on a attribuées à la première variable ζ, et, dans les colonnes suivantes, les valeurs de la fonction v qui se rapportent à la seconde variable ζ_1. Pour avoir la valeur particulière de v, il faut donc s'arrêter, dans la première colonne, à l'argument ζ ; suivre la ligne horizontale où cet argument est incrit et arriver à la colonne qui répond au second argument ζ_1. La valeur de v s'y trouvera inscrite immédiatement, si les arguments donnés coïncident avec ceux de la Table ; mais si ces arguments sont compris entre deux valeurs consécutives de ζ et ζ_1, et c'est ce qui arrivera le plus souvent, il faudra avoir recours à des interpolations qui pourront devenir assez compliquées, si les résultats de la Table ne sont pas très voisins les uns des autres.

II. — Arguments des perturbations planétaires

Dans la formation des Tables planétaires, on prend pour *arguments des perturbations*, les longitudes moyennes l, l', l''..., l^{VII}

Digitized by Google

des diverses planètes, comptées à partir de l'équinoxe de 1850,0 ; et, pour la commodité du calcul, on rapporte ces arguments à la division décimale de la circonférence en 400 parties ou grades. Quand on trouve une somme qui dépasse 400 grades, on en retranche ce nombre comme désignant 360° ou une circonférence entière. Si les perturbations étaient très grandes, ce mode de division serait insuffisant et il faudrait recourir à la division du cercle en 1000 et même en 4000 parties. C'est ce que Le Verrier a fait dans plusieurs de ses Tables et notamment dans celles de Mercure et du Soleil, où les valeurs des longitudes moyennes sont rapportées au quart de la circonférence divisé en 1000 parties.

Les arguments l, l', l''... qui servent ainsi à calculer les effets des perturbations planétaires sont donnés dans les Tables, d'abord pour le commencement de chacune des années du XIXe siècle et ensuite pour les jours, les heures, les minutes et les secondes. Cette disposition permet de former immédiatement les valeurs des arguments qui répondent à une époque donnée t [a].

Soit $\mathfrak{L}$ la longitude moyenne, pour le temps t, de l'une quelconque des planètes dont on a à calculer les perturbations ; on aura, comme on sait,

$$\mathfrak{L} = \varepsilon + nt,$$

ε étant la valeur de $\mathfrak{L}$ qui se rapporte à l'origine du temps ou à l'époque 1850,0, et n le moyen mouvement annuel

(a) Dans le calcul des *Éphémérides*, l'époque t pour laquelle on calcule est toujours composée d'un nombre entier de jours ; les Tables qui donnent les mouvements de l, l' pour les heures, les minutes et les secondes sont donc ici sans application.

Digitized by Google

correspondant. Comme cette dernière quantité est donnée pour une durée de $365\frac{1}{4}$, on en conclura aisément son mouvement en un jour, et l'on aura

$$\frac{n}{365,25} = \beta,$$

β étant, comme n, exprimé en grades et fraction du grade.

On aura ensuite à l'époque 1850,0

$$\mathfrak{L} = \varepsilon,$$

et à l'époque 1851

$$\mathfrak{L} = \varepsilon + 365\beta.$$

En ajoutant alors successivement à cette dernière valeur les quantités constantes $365\,\beta$ ou $366\,\beta$, selon que l'année est commune ou bissextile, on en déduira toutes les valeurs de $\mathfrak{L}$ qui se rapportent au commencement de chacune des années comprises dans la période que l'on a voulu considérer. Pour la valeur de l', par exemple, qui se rapporte à Vénus, on a [*Appendice*, § (*g*)]

$$l' = \varepsilon' + n't = 272^g,8378 + 650^g,197991t$$

et

$$\beta' = 1^g,78015.$$
$$365\beta' = 249^g,7530.$$

En ayant égard à l'ordre des années ordinaires et des années bissextiles, on aura donc

années	1850	1851	1852 B	1853...
$l' =$	273^g	123^g	372^g	224^g...

Digitized by Google

Ces valeurs de l' et celles de l, l'', l''', l^{IV}... que l'on formerait de la même manière, sont communes à toutes les Tables planétaires.

III. — Remarque sur les arguments des inégalités donnés dans les tables générales de Jupiter

L'étude des théories de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et de Neptune a conduit à de nouvelles valeurs de l^{IV}, l^{V}, l^{VI}, et l^{VII} qui diffèrent un peu de celles primitivement adoptées dans la construction des Tables des planètes Mercure, Vénus, la Terre, Mars et Jupiter. En rapportant toujours les angles à la division centésimale de la circonférence, on a trouvé

$$(a)\qquad \begin{aligned} l^{\text{IV}} &= 177^{\text{g}},7995 + 33^{\text{g}},7211833t,\\ l^{\text{V}} &= 16,5280 + 13,5790453t,\\ l^{\text{VI}} &= 32,8338 + 4,7607216t,\\ l^{\text{VII}} &= 371.7176 + 2,4276000t,\end{aligned}$$

et de là on a conclu pour les mouvements β^{IV},$365\beta^{\text{IV}}$ etc.

$$\begin{aligned} \beta^{\text{IV}} &= 0,092324, & \beta^{\text{V}} &= 0,037177,\\ 365\,\beta^{\text{IV}} &= 33,698102, & 365\,\beta^{\text{V}} &= 13,569751,\\ \beta^{\text{VI}} &= 0,013034, & \beta^{\text{VII}} &= 0,006645,\\ 365\,\beta^{\text{VI}} &= 4,757463, & 365\,\beta^{\text{VII}} &= 3,425938.\end{aligned}$$

Les différences qu'offrent les valeur de l^{IV}, l^{V}, l^{VI} et l^{VII} avec celles que nous avons rapportées dans l'*Appendice* au § (g) sont très faibles, et ne sauraient avoir d'influence appréciable que sur le calcul des grandes inégalités de Jupiter produites

Digitized by Google

par l'action de Saturne, calcul où les arguments l^{IV} et l^{V} doivent être obtenus avec quatre décimales. Mais les valeurs des arguments rectifiés d'après les nouvelles expressions (*a*) ont été données dans les Tables de Saturne. Rien ne sera donc plus facile que de les substituer à celles que l'on trouve dans les Tables générales de Jupiter.

IV. — Conversion des grades en degrés, et réciproquement

Un nombre de grades, minutes et secondes s'écrit immédiatement sous la forme d'un nombre décimal. Ainsi, pour représenter 78 grades, 16 minutes, 32 secondes, on écrit $78^g,1632$.

Le grade étant les $\frac{9}{10}$ du degré, on voit que pour convertir l'angle $78^g,1632$, par exemple, en degrés, minutes et secondes sexagésimales, il faut d'abord le multiplier par 0,9, ce qui donne $70^\circ,34688$. La fraction décimale de ce produit étant multipliée par 60 fait connaître les minutes, et la partie fractionnaire du nouveau produit, multipliée par le même nombre, donne les secondes et centièmes de seconde. On trouve ainsi que l'angle $78^g,1632$ équivaut à $70^\circ, 20', 48'', 768$.

Réciproquement, pour convertir un nombre de degrés, minutes, secondes et centièmes de seconde, en grades et fraction décimale du grade, on commence par réduire les minutes en secondes ; puis on transforme le total des secondes en fraction décimale du degré, ce qui se fait en divisant ce total par 3600. C'est ainsi que 70°, $20'$, $48''$, 768 reviennent à $70^g,34688$. En divisant alors ce nombre par 0,9, on trouve 78^g, 1632 pour la valeur cherchée de l'angle proposé.

Ces conversions de degrés en grades et de grades en degrés,

Digitized by Google

sont très fréquentes dans les applications des Tables au calcul des positions héliocentriques des planètes.

IV. — Conversion en secondes sexagésimales des arcs exprimés en parties du rayon, et réciproquement

La division adoptée dans les calculs astronomiques est celle de la circonférence en 360 degrés. Chaque degré est divisé en 60 minutes et chaque minute en 60 secondes ; les fractions de la seconde sont données en décimales.

Cela posé, supposons que l'on veuille transformer en secondes sexagésimales un arc α exprimé en parties du rayon. Le nombre de secondes contenues dans la demi-circonférence étant 648000, si l'on divise la valeur de $\pi = 3{,}14159265$ par ce nombre, on aura l'arc d'une seconde ou

$$\text{arc } 1'' = 206364{,}8.$$

On aura ensuite, $[\alpha'']$ désignant le nombre de secondes contenues dans α,

$$[\alpha''] = \alpha \frac{648000}{\pi} = \alpha \frac{1}{\text{arc } 1''},$$

ou en considérant que l'arc de $1''$ est sensiblement égal à son sinus

$$(a) \qquad [\alpha''] = \frac{\alpha}{\sin 1''}, \quad \log \frac{1}{\sin 1''} = 5{,}3144251.$$

Inversement, on aurait

$$(b) \qquad \alpha = [\alpha''] \sin 1'', \qquad \log \sin 1'' = 4{,}6855749.$$

Digitized by Google

Ces formules très simples permettent d'opérer, dans les relations algébriques que l'on a à considérer, la transformation de α en $[\alpha'']$ ou celle de $[\alpha'']$ en α. Dans le premier cas, il faut, comme on voit, diviser α par $\sin 1''$, et, dans le second, il faut multiplier, au contraire, $[\alpha'']$ par la même quantité.

Si la division adoptée pour la circonférence était celle centésimale, on aurait, μ désignant le quotient de la division de 2000000 par π,

$$\mu = 636619,7724,$$
$$\log \mu = 5,8038801,$$

et les formules (a) et (b) deviendraient alors

$$[\alpha'']_c = \alpha_c \mu \quad \text{et} \quad \alpha_c = \frac{1}{\mu}[\alpha'']_c.$$

Nous employons ici l'indice c pour désigner les valeurs de $[\alpha'']$ et α qui se rapportent à la division du cercle en 400 grades.

Digitized by Google

CHAPITRE II

Construction des Tables concernant la longitude vraie

I. — Réduction en tables des parties séculaires

La formation des Tables astronomiques exige, comme nous l'avons dit, qu'on développe d'abord avec tout le soin nécessaire les formules qui sont la représentation analytique des perturbations, et qu'on réduise ensuite ces formules en nombres. Ce travail est extrêmement long et délicat; mais une fois exécuté, il devient facile d'en disposer les résultats en Tables et de donner à celles-ci la forme qui convient le mieux aux applications.

Supposons, par exemple, que l'on veuille construire les Tables de Jupiter qui se rapportent à la longitude vraie v, et soient

$$L = L_s + L_p, \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_s + \tilde{\omega}_p, \qquad E = E_s + E_p$$

les valeurs *complètes* des éléments qui servent au calcul de cette longitude. Il convient tout d'abord de réduire en Tables les parties séculaires L_s, $\tilde{\omega}_s$, E_s, de ces valeurs. Or, d'après ce

Digitized by Google

qu'on a vu pages 383 et suivantes, on a

$$L_s = 160°,1',10'',26 + 109306\,,87213t \qquad [\alpha]$$
$$+ 30'',344\upsilon^2 - 0'',742\upsilon^3, \qquad [\beta]$$
$$\varpi_s = 11°,54',58'',41 + 57'',90321t \qquad [\alpha']$$
$$+ 90'',490\upsilon^2 - 2'',165\upsilon^3. \qquad [\beta']$$

Ainsi décomposées, ces expressions renferment chacune deux partie distinctes : une partie [α] ou [α'] simplement proportionnelle au temps, et une autre partie [β] ou [β'] dépendant des puissances supérieures du temps. Les termes de la première partie sont donnés par une Table à simple entrée dite *Table des époques*, et sont calculés pour le commencement de toutes les années du XIXe siècle comprises entre 1801 et 1900 inclusivement ; ceux de la seconde partie [β] ou [β'], calculés de dix en dix ans, pour une durée de 1000 années à partir de 1350, sont compris dans la *Table des variations séculaires*. Ces deux Tables qui se complètent l'une l'autre sont bien faciles à former.

Construction de la Table des époques (Tables I, II, III et IV de Jupiter)

D'après les expressions [α] et [α'], la longitude moyenne de Jupiter et celle de son périhélie, ont respectivement pour valeurs

$$160°,1',10'',26, \qquad 11°,54',58,41.$$

Ces longitudes se rapportent à l'origine du temps, c'est-à-dire à l'époque 1850,0. Et comme on connait les mouvements de ces éléments en une année julienne de $365^j,25$, savoir

$$109306'',87213 \qquad 57'',90321$$

Digitized by Google

rien n'est plus facile que d'en conclure ces mêmes mouvements pour un jour, puis pour 365 et 366 jours. On a ainsi

L	en 1 jour . . .	0°,4′,59″,2659,
	en 365 jours. .	30,20,32,0557,
	en 366 jours. .	30,25,31,3216;
ϖ	en 1 jour . . .	0″,159,
	en 365 jours. .	57,864,
	en 366 jours. .	58,022.

En ajoutant alors ces valeurs à celles de 1850,0 et ayant égard à l'ordre des années ordinaires et des années bissextiles, on obtiendra les parties de la longitude moyenne et de la longitude du périhélie qui varient proportionnellement au temps, et pour chacune des années du XIXe siècle. On formera de la sorte le tableau suivant :

année	long moy. L	long du périh. ϖ
1850	160°,1′,10″,26	11°,54′,58″,4
1851	190,21,42,32	11,55,56,3
1852.B	220,42,14,37	11,56,54,1
1853	251,7,45,69	11,57,56,2
. . . .	. . . . .	. . . . .

Pour faciliter les calculs, les Tables donnent aussi les mouvements de L et de ϖ, pour les jours, heures, minutes et secondes. Ces Tables, très simples, n'ont besoin d'aucune explication.

On trouve encore dans les mêmes Tables la partie de la longitude θ du nœud ascendant qui varie proportionnellement au temps, et son mouvement pour les jours, les heures, les minutes et les secondes. Nous en reparlerons au paragraphe I du chapitre III.

Digitized by Google

Table des variations séculaires (Table V de Jupiter)

Supposons, pour construire la Table des valeurs de $[\beta]$ et de $[\beta']$, que l'on veuille calculer les termes séculaires de la longitude moyenne et de la longitude du périhélie qui correspondent à l'année 2100, par exemple. En prenant $t = 250$ et remarquant que $\upsilon = 0{,}002t$, on aura d'abord

$$\upsilon = 0{,}500, \qquad \upsilon^2 = 0{,}250, \qquad \upsilon^3 = 0{,}125\,;$$

on aura ensuite

$$[\beta] = 30''444\ (0{,}250) - 0'',742\ (0{,}125) = +\ 7'',493,$$
$$[\beta'] = 90''490\ (0{,}250) - 2'',165\ (0{,}125) = +\ 22''352.$$

Ces valeurs de L et de $\tilde{\omega}$ sont données en centièmes de seconde pour le premier élément, et en dixièmes de seconde seulement pour le second. Ainsi on a

$$L = +\ 7'',49,$$
$$\tilde{\omega} = +\ 0',22'',4.$$

La même Table contient la partie séculaire de l'excentricité E dont l'expression générale est, d'après ce qu'on a vu page 383,

$$E_s = 9952'',66 + 171'',88\upsilon - 2'',39\upsilon^2 - 0'',05\upsilon^3.$$

Appliquée à notre exemple, cette formule donne

$$E_s = 9952'',66 + 85'',940 - 0'',597 - 0'',006$$

ou

$$E_s = 10038'',00.$$

En regard de E_s, on trouve le logarithme de $\frac{1}{E_s \sin 1''}$ ou du facteur par lequel il faut multiplier la fonction $E\delta\tilde{\omega}_p$, pour

Digitized by Google

avoir $\delta\tilde{\omega}_p$ ou la variation périodique totale de la longitude du périhélie. Ce facteur qui correspond uniquement à la partie séculaire de l'excentricité a ici pour logarithme .

$$\log \frac{1}{E_s \sin 1''} = 1,3127779.$$

Enfin la Table V donne encore les *termes séculaires* de la longitude du nœud ascendant et de l'inclinaison φ_1 de l'orbite sur l'écliptique mobile qui servent au calcul de la latitude. Ces termes, ainsi que les précédents, sont calculés de dix en dix ans et pour 1000 années à partir de 1350.

III. — Réduction en tables des parties périodiques

Construction des Tables VI, VII, VIII et IX de Jupiter. — Inégalités à longues périodes dépendant des arguments V, 2V et W.

Les parties périodiques L_p, $\tilde{\omega}_p$, E_p et δa_p que nous allons maintenant considérer renferment, outre les termes L_{p_1}, $\tilde{\omega}_{p_1}$, relatifs à l'action de Saturne, l'ensemble des inégalités à longues périodes dépendantes des angles V, 2V, W, inégalités dont les expressions convenablement ordonnées peuvent être mises sous la forme générale :

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M} \sin V + \mathfrak{N} \cos V, \\ \mathfrak{M}_1 \sin 2V + \mathfrak{N}_1 \cos 2V, \\ \mathfrak{M}_2 \sin W + \mathfrak{N}_2 \cos W. \end{array} \right.$$

Bornons-nous à considérer l'ensemble des termes en V et en 2V qui affectent la longitude moyenne de Jupiter. Ces termes ont été calculés par Le Verrier dans sa théorie de Jupiter et,

Digitized by Google

après les transformations convenables d'arguments, il a obtenu pour leurs valeurs aux cinq époques fondamentales considérées :

	(sin V)	(sin 2V)	(cos V)	(cos 2V)
1850	+ 1205″,96	— 9″,33	+ 13″,17	0″,00
2350	+ 1155,02	— 8,14	— 217,87	+ 3 ,51
2850	+ 1060,68	— 5,84	— 429,06	+ 6 ,10
3350	+ 928,60	— 2,37	— 612,90	+ 7 ,52
3850	+ 765,66	+ 0.36	— 763,12	+ 7 ,63

Les sinus et cosinus entre parenthèses sont les arguments dont chaque groupe de termes dépend.

Si l'on forme pour chaque colonne les différences Δ_1, Δ_2, Δ_3..., puis qu'on développe suivant les puissances du temps, comme il a été expliqué pages 381 et suivantes, on aura

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = + 1205'',96 - 27'',68\upsilon - 23'',94\upsilon^2 + 0'',63\upsilon^3, \\ \mathfrak{N} = + 13,17 - 288,15\upsilon + 5,59\upsilon^2 + 1,57\upsilon^3, \\ \mathfrak{M}_1 = - 9,33 + 0,57\upsilon + 0.65\upsilon^2 - 0,01\upsilon^3, \\ \mathfrak{N}_1 = 0,00 + 3,88\upsilon - 0,30\upsilon^2 - 0,06\upsilon^3. \end{cases}$$

Ainsi les coefficients $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$... de L_{P_2} et L_{P_3} s'expriment ici par des fonctions du troisième degré en t.

Comme les arguments V et 2V sont semblables, on peut réunir les termes de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ avec ceux de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$ qui dépendent des mêmes puissances du temps et ne former du tout qu'une seule Table ayant V pour argument. Si donc l'on représente par U_0 la somme des termes indépendants de υ; par U_1 celle qui dépend de la première puissance de cette quantité, et ainsi de suite, on aura pour exprimer la partie $L_{P_2} + L_{P_3} = \delta L$ de la longitude moyenne qui dépend des arguments V et 2V,

$$(\mathrm{III})\qquad \delta L = U_0 + U_1\upsilon + U_2\upsilon^2 + U_3\upsilon^3.$$

Digitized by Google

Sous cette forme concise, l'expression de δL est facilement réductible en Table.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer les valeurs de U_0, U_1... qui répondent à l'argument $V = 40^g$ compris dans le premier quadrant. En recourant aux expressions (I) et à celles (II), on trouvera, tous calculs faits :

$$
\begin{aligned}
+ 1205'',96 \ (\sin 36^\circ) &= + 708'',846 \\
+ 13,17 \ (\cos 36^\circ) &= + 10,655 \\
- 9,33 \ (\sin 72^\circ) &= - 8,873 \\
U_0 &= + 710'',63 ; \\
- 27'',68 \ (\sin 36^\circ) &= - 16'',270 \\
- 238,15 \ (\cos 36^\circ) &= - 192,667 \\
+ 0,57 \ (\sin 72^\circ) &= + 0,542 \\
+ 3,88 \ (\cos 72^\circ) &= + 1,198 \\
U_1 &= - 207'',20 ; \\
- 23'',94 \ (\sin 36^\circ) &= - 14'',072 \\
+ 5,59 \ (\cos 36^\circ) &= + 4,522 \\
+ 0,65 \ (\sin 72^\circ) &= + 0,618 \\
- 0,30 \ (\cos 72^\circ) &= - 0,093 \\
U_2 &= - 9'',02 ; \\
+ 0'',63 \ (\sin 36^\circ) &= + 0'',370 \\
+ 1,57 \ (\cos 36^\circ) &= + 1,270 \\
- 0,01 \ (\sin 72^\circ) &= - 0,009 \\
- 0,06 \ (\cos 72^\circ) &= - 0,018 \\
U_3 &= + 1'',61.
\end{aligned}
$$

Par un calcul semblable et tout aussi simple, on obtiendrait les valeurs de U_0, U_1, U_2, qui se rapportent aux expressions de δE, $E\delta\varpi$, δa, et l'on formerait ainsi la Table VIII où ces valeurs sont données de deux en deux grades. Mais

Digitized by Google

cette Table ainsi que celles VI et VII ont été condensées en une seule, la Table IX ; dans les applications, il sera donc commode d'y avoir recours.

Construction de la Table X de Jupiter — Perturbations périodiques dues à l'action de Saturne

En développant par rapport au temps l'ensemble des termes périodiques dus à l'action de Saturne et correspondant respectivement aux parties L_{P_1}, E_{P_1}, $E\delta\tilde{\omega}_{P_1}$ et δa_{P_1}, on les amènera, comme dans le paragraphe qui précède, à dépendre de la formule générale

$$\begin{aligned} &C_0 + S_1 \sin l' + S_2 \sin 2l' + \ldots \\ &\quad + C_1 \cos l' + C_2 \cos 2l' + \ldots \end{aligned}$$

où C_0, S_1, S_2... C_1, C_2..., sont des coefficients fonctions implicites de υ et υ^2. $\delta\chi$ désignant la perturbation totale de l'un quelconque des quatre éléments L, E, $\tilde{\omega}$ et a, on aura donc

$$\begin{aligned} \delta\chi = {} & C_0 + U_1\upsilon + U_2\upsilon^2 \\ & + [S_1 + U_1\upsilon + U_2\upsilon^2] \sin l' \\ & + [C_1 + U_1\upsilon + U_2\upsilon^2] \cos l' \\ & + [S_2 + U_1\upsilon + U_2\upsilon^2] \sin 2l' \\ & + [C_2 + U_1\upsilon + U_2\upsilon^2] \cos 2l' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La détermination numérique des coefficients C_0, S_1, C_1... U_1 et U_2 se fait par un calcul semblable à celui que nous avons effectué dans la construction de la Table VIII. Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir la valeur C_3 que renferme la partie L_{P_1} ou δL de la longitude moyenne, et qui répond à l'argument $\zeta = 10^s$.

Digitized by Google

On a d'après la théorie de Jupiter

$$
\begin{aligned}
C_5 = &+ [-0'',09 - 0'',02\upsilon] \sin 3\zeta \\
&+ [-0,15 - 0,12\upsilon] \sin 4\zeta \\
&+ [+0,05 - 0,08\upsilon] \sin 5\zeta \\
&+ [+0,02 - 0,03\upsilon] \sin 6\zeta \\
&+ [+0,03 - 0,02\upsilon] \sin 7\zeta \\
&+ 0'',05 \sin 8\zeta + 0'',01 \sin 9\zeta \\
&+ [-0'',15 + 0,03\upsilon] \cos 3\zeta \\
&+ [-0,33 - 0,11\upsilon + 0,05\upsilon^2] \cos 4\zeta \\
&- 0,11 \cos 5\zeta - 0,09 \cos 6\zeta - 0,06 \cos 7\zeta \\
&- 0,04 \cos 8\zeta - 0,02 \cos 9\zeta.
\end{aligned}
$$

En prenant donc

$$
\begin{gathered}
3\zeta = 27^\circ,\ 4\zeta = 36^\circ,\ 5\zeta = 45^\circ,\ 6\zeta = 54^\circ, \\
7\zeta = 63^\circ,\ 8\zeta = 72^\circ,\ 9\zeta = 81^\circ
\end{gathered}
$$

et effectuant les opérations indiquées, on aura d'abord

$$
\begin{aligned}
-0'',09\ (\sin 3\zeta) &= -0'',041 \\
+0\ ,15\ (\sin 4\zeta) &= +0\ ,088 \\
+0\ ,05\ (\sin 5\zeta) &= +0\ ,035 \\
+0\ ,02\ (\sin 6\zeta) &= +0\ ,016 \\
+0\ ,03\ (\sin 7\zeta) &= +0\ ,027 \\
+0\ ,01\ (\sin 9\zeta) &= +0\ ,010 \\
-0\ ,15\ (\cos 3\zeta) &= +0\ ,134 \\
-0\ ,33\ (\cos 4\zeta) &= +0\ ,267 \\
-0\ ,11\ (\cos 5\zeta) &= -0\ ,078 \\
-0\ ,09\ (\cos 6\zeta) &= -0\ ,053 \\
-0\ ,04\ (\cos 8\zeta) &= -0\ ,012 \\
-0\ ,02\ (\cos 9\zeta) &= -0\ ,003\,;
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

d'où

$$C^5 = -0'',615 + 0'',176 = -0'',44.$$

On aura ensuite pour les termes en υ

$$\begin{aligned}
-0'',02\,(\sin 3\zeta) &= -0'',009\\
-0\,,12\,(\sin 4\zeta) &= -0\,,071\\
-0\,,04\,(\sin 5\zeta) &= -0\,,028\ (a)\\
-0\,,03\,(\sin 6\zeta) &= -0\,,024\\
-0\,,02\,(\sin 7\zeta) &= -0\,,018\\
-0\,,03\,(\cos 3\zeta) &= +0\,,027\\
-0\,,11\,(\cos 4\zeta) &= -0\,,089;
\end{aligned}$$

d'où

$$U_1 = -0'',239 + 0'',027 = -0'',21.$$

Enfin, on trouvera pour la valeur de U_2

$$U_2 = +0'',05\,(\cos 4\zeta) = +0''04.$$

Construction de la Table XI de Jupiter

Cette Table fournit, avec l'excentricité E pour argument, le logarithme du facteur

$$\sqrt{\frac{1 + E \sin 1''}{1 - E \sin 1''}}$$

par lequel il faut multiplier $\tang \frac{1}{2} u$ pour avoir $\upsilon - \tilde{\omega}$ et par suite v. E y varie de dix en dix secondes et est donné depuis

(*a*) Dans l'expression ci-dessus de C_5 que nous avons empruntée au préambule des Tables de Jupiter, il y a une faute d'impression. Au lieu de $-0'',08\upsilon \sin 5\zeta$, il faut $-0'',4\,\upsilon \sin 5\zeta$, comme nous l'écrivons.

Digitized by Google

$E = 9500''$ jusqu'à $E = 10500''$. La formation de cette Table est des plus simples.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir le logarithme de $\sqrt{\{\ldots\}}$ qui répond à $E = 9650''$. On a

$$1 + E \sin 1'' = 1{,}0467845,$$
$$1 - E \sin 1'' = 0{,}9532155,$$

et

$$\log (1 + E \sin 1'') = 0{,}0198573,$$
$$\log (1 - E \sin 1'') = 9{,}9791911.$$

On a donc

$$\log \frac{1 + E \sin 1''}{1 - E \sin 1''} = 0{,}0406662,$$

et par suite

$$\log \sqrt{\frac{1 + E \sin 1''}{1 - E \sin 1''}} = 0{,}0203331.$$

Construction des Tables XIII, XIV et XV de Jupiter. — Perturbations périodiques dues aux actions des planètes Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune.

Conformément à ce que nous avons dit au chapitre III du Livre I, on doit appliquer à la longitude vraie v, calculée au moyen des valeurs complètes de L, E, et $\tilde{\omega}$, la correction δv par laquelle il est tenu compte des actions perturbatrices de Vénus, de la Terre, de Mars, d'Uranus et de Neptune. Les termes correspondant à ces diverses actions sont exprimés en la même forme que ceux provenant de l'action de Saturne, et leur calcul dépend des Tables suivantes :

Table XIII. Cette Table donne la partie de δv qui se rapporte aux actions de Vénus, de la Terre et de Mars ; elle est à simple

Digitized by Google

entrée et dépend des arguments $l' - l^{\text{IV}}$, $l'' - l^{\text{IV}}$ et $l''' - l^{\text{IV}}$ (a).

Table XIV. Cette Table relative à l'action de Saturne est à double entrée; elle a pour argument vertical l^{IV} et pour argument horizontal $l^{\text{VI}} - l^{\text{IV}}$.

Table XV. Elle est aussi à double entrée et fournit les perturbations dues à l'action de Neptune. Cette Table dépend des arguments l^{VII} et $l^{\text{VII}} - l^{\text{IV}}$.

Les perturbations données par ces Tables sont, toutes, exprimées en centièmes de seconde.

Table XVI. — Réduction à l'écliptique

La réduction à l'écliptique dépend de l'argument $v - \theta_1$ et de l'inclinaison φ_1 déterminée par la formule

$$\varphi_1 = 1^\circ,18',41'',37 - 1',42'',60\upsilon + 0'',35\upsilon^2;$$

elle est donnée, comme les autres perturbations, sous la forme générale

$$\rho = U_0 + U_1\,\upsilon.$$

U_0 est le coefficient de ρ qui correspond au terme

$$-\frac{\tang^2\frac{1}{2}\varphi_1}{\sin 1''}\sin 2\,(v - \theta_1) + \ldots$$

calculé en ne considérant d'abord que la partie *constante* $\varphi_1 = 1^\circ, 18', 41'', 37$ de l'inclinaison, et $U_1\upsilon$ la *variation séculaire* de ρ que l'on obtient en ayant égard, dans le calcul du terme ci-dessus, à la partie de φ_1 qui est proportionnelle au

(a) Les différents termes de cette Table ont été pris par mégarde avec un signe contraire.

Digitized by Google

temps. Par exemple, si l'on prend $(v - \theta_1) = 10^0$, on trouve pour la valeur de U_0 correspondante

$$\log \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi_1 = 6{,}1772618$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}6855749$$
$$\log \text{diff.} = 1{,}4316869$$
$$\log \sin 2\,(v - \theta_1) = 9{,}5340517$$
$$\log \rho = 0{,}9657386 -$$
$$\rho = -9'',24.$$

Ces deux termes U_0 et U_1, qui sont toujours de signes contraires, composent la Table XVI et sont donnés pour toutes les valeurs de l'argument $v - \theta_1$ comprises entre 0^0 et 360^0.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Tables concernant la latitude et le rayon vecteur

I. — Parties séculaires de la longitude du nœud ascendant et de l'inclinaison

Les parties séculaires θ_1 et φ_1 de la longitude du nœud ascendant et de l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique mobile, sont représentées, comme on l'a vu page 383 par les formules

$$(a)\quad \theta_1 = 98^\circ,56',17'',00 + 36'',36617t + 32'',85\upsilon^2 - 3'',83\upsilon^3,$$
$$(b)\quad \varphi_1 = 1^\circ,18',41'',37 - 1',42'',60\upsilon + 0'',35\upsilon^2.$$

Suivant la marche adoptée par Le Verrier dans la construction de ses Tables, ce sont ces variations que l'on doit appliquer à l'inclinaison φ et à la longitude θ du nœud ascendant, avant d'introduire les valeurs de ces éléments dans la formule qui exprime s.

Comme pour les autres éléments, la partie séculaire θ_1 de la longitude du nœud renferme des termes simplement proportionnels au temps, et des termes qui, dépendant des puissances supérieures du temps, méritent le nom de *termes sécu-*

Digitized by Google

laires. Les premiers sont disposés dans les Tables I, II, III et IV de la même manière que pour L et ϖ; les seconds, calculés de dix en dix ans, sont donnés dans la Table V pour une période de 1000 années.

Considérons la partie de θ_1 qui varie proportionnellement au temps; son expression est, d'après la formule (a)

$$[\alpha] = 98^\circ,56',17'',00 + 36'',36617t.$$

En divisant le mouvement 36″,36617 de θ_1 par 365,25, on obtient sa valeur en un jour ou

$$\frac{36'',36617}{365,25} = 0'',099565,$$

et de là on conclut pour le mouvement en 365 jours

$$365 \times 0'',099565 = 36'',3412.$$

En ayant égard alors à l'ordre des années ordinaires et des années bisextiles, on forme aisément le tableau suivant :

	Longitude du nœud θ
1850.	98°,56,17,0
1851.	98 ,56,53,3
1852.B	98 ,57,29,7
1853.	98 ,58, 6,1.
. . .	. . . . .

Considérons, en second lieu, la partie séculaire de θ_1 représentée par la formule

$$[\beta] = + 32'',85\upsilon^2 - 3'',83\upsilon^3.$$

En appliquant cette formule aux données de l'exemple considéré plus haut, savoir

$$\upsilon = 0,500, \qquad \upsilon^2 = 0,250, \qquad \upsilon^3 = 0,125,$$

Digitized by Google

on trouve pour l'année 2100

$$[\beta] = + 8'',212 - 0''479.$$

En se bornant, comme pour ϖ aux dixièmes de seconde, on a donc

$$[\beta] = 7'',7.$$

Quant à la partie séculaire φ_1 de l'inclinaison déterminée par la formule

$$\varphi_1 = 1°,18',41'',37 - 1',42'',60\upsilon + 0'',35\upsilon^2,$$

elle donne

$$\varphi_1 = 1°,18',41'',37 - 51'',30 + 0'',09 = 1°,17',50'',16.$$

Cette dernière variation est comprise dans la Table V ; en regard on trouve le logarithme de son sinus ou

$$\log \sin \varphi_1 = 8,354869.$$

II. — Partie périodique de la latitude due a l'action de Saturne

Construction de la Table XX de Jupiter

L'ensemble des termes périodiques de la latitude, dus à l'action de Saturne, est représenté, comme on l'a vu page 400, par la formule générale

$$\begin{aligned}\delta s = C_0 &+ S_1 \sin l^{\prime\prime} + S_2 \sin 2l^{\prime\prime} + \ldots \\ &+ C_1 \cos l^{\prime\prime} + C_2 \cos 2l^{\prime\prime} + \ldots\end{aligned}$$

C_0, C_1, C_2... S_1, S_2... sont des fonctions de υ seulement, et

Digitized by Google

l'on a

$$\begin{aligned}\delta s = {} & C_0 + U_1 \upsilon \\ & + [S_1 + U_1 \upsilon] \sin l^{\nu} \\ & + [C_1 + U_1 \upsilon] \cos l^{\nu} \\ & + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Proposons-nous, comme application, de déterminer les valeurs de C_2 et de $U_1 \upsilon$ qui répondent à l'argument $\zeta = 186^g$.

On a

$$\begin{aligned} C_2 = {} & - 0'',05 \sin \zeta & & + 0'',35 \\ & & & + 0,04 \cos \zeta \\ & - 0,06 \sin 2\zeta & & + 0,11 \cos 2\zeta \\ & - 1,81 \sin 3\zeta & & + 3.17 \cos 3\zeta \\ & + 0,02 \sin 4\zeta & & - 0,05 \cos 4\zeta \\ & + 0,02 \sin 5\zeta & & \\ & & & - 0,01 \cos 5\zeta \\ & & & - 0,03\upsilon \cos 3\zeta ; \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \zeta &= 167^\circ,24', \\ 2\zeta &= 334,48, \\ 3\zeta &= 142,12, \\ 4\zeta &= 309,36, \\ 5\zeta &= 117,00, \end{aligned}$$

et de là on conclut

$$\begin{aligned} (- 0'',05) \sin \zeta &= - 0'',011 \\ (- 0,06) \sin 2\zeta &= + 0,025 \\ (- 1,81) \sin 3\zeta &= - 1,109 \\ (+ 0,02) \sin 4\zeta &= - 0,015 \\ (+ 0,02) \sin 5\zeta &= + 0,018 \\ (+ 0,04) \cos \zeta &= - 0,039 \\ (+ 0,11) \cos 2\zeta &= + 0,099 \\ (+ 3,17) \cos 3\zeta &= - 2.505 \\ (- 0,05) \cos 4\zeta &= - 0,032 \\ (- 0,01) \cos 5\zeta &= + 0,004 \\ (- 0,03\upsilon) \cos 3\zeta &= + 0,024\upsilon. \end{aligned}$$

Digitized by Google

On a donc

$$C_2 = -1'',092 - 2'',473 + 0'',35 = -3'',22,$$
$$U_1 = +0'',024;$$

et par conséquent

$$100\,C_2 = -322, \quad 100\,U_1 = +2.$$

III. — Tables concernant le rayon vecteur

Tables XVII et XVIII de Jupiter

Le rayon vecteur r est donné par la formule

$$r = a\,(1 - E\cos u).$$

Mais comme les éléments a, E et $L - \varpi$ dont elle dépend ne sont affectés, dans leurs parties périodiques, que des termes dus à l'action de Saturne, il faut, pour rendre cette formule complète, y ajouter la correction δr par laquelle il est tenu compte des actions d'Uranus et de Neptune, les seules qui soient sensibles. On a donc définitivement

$$(1) \qquad r = a\,(1 - E\cos u) + \delta r.$$

L'ensemble des termes de la partie périodique δr est donné par les Tables à double entrée XVII et XVIII; la première est relative aux perturbations d'Uranus et la seconde aux perturbations de Neptune. Toutes ces perturbations sont exprimées en unités décimales du sixième ordre.

La formule (1) suppose connu le demi-grand axe a de l'orbite de Jupiter. Or, il résulte des déterminations précédentes

Digitized by Google

que l'on a

$$(2) \qquad a = 5{,}202800 + \delta a_p,$$

δa_p étant l'ensemble des termes à longues périodes dépendant des angles V et 2V et des termes périodiques dus à l'action de Saturne Ces termes sont donnés par les Tables VIII et X dont nous avons expliqué la formation au chapitre qui précède.

Pour les applications numériques, il convient d'écrire

$$(3) \qquad \begin{cases} r = a - a\,\mathrm{E}\sin 1''\cos u, \\ a = 5{,}202800 + \delta a_p \sin 1'', \end{cases}$$

conformément à ce qui a été dit page 417.

Digitized by Google

LIVRE III

APPLICATION DES TABLES AU CALCUL DES POSITIONS HÉLIOCENTRIQUES DES PLANÈTES

CHAPITRE I

Calcul des positions héliocentriques de Jupiter et de Saturne

---

I. — Tableau des arguments

Proposons-nous, comme application, de déterminer le lieu héliocentrique de Jupiter pour le 30 avril 1884, à midi moyen à Paris.

La Table III donne d'abord

$$\textit{Fraction de l'année } f = 0{,}329.$$

On a ensuite

$$\upsilon = \frac{t+f}{500} = \frac{34{,}329}{500} = 0{,}06866,\ \upsilon^2 = 0{,}0047.$$

Au moyen des Tables I et III, on trouve

Argum.	l'	l''	l'''	l^{v}
Table I...	379	111	124	124,2776
» III.	214	131	70	11,0789
Σ..	193	242	194	135,3565

Argum.	l^{v}	l^{vi}	l^{vii}
Table I...	78,1632	193,5	55
» III.	4,4612	1,6	1
Σ..	82,6244	195,1	56

Digitized by Google

et de là on conclut

$$\zeta = l^{\nu} - l^{\nu} = 347^{s},2679$$

	log sin	log cos
$l^{\nu} = 74^{\circ},21',43''$	9,98362 +	9,43066 +
$2l^{\nu} = 148,43,26$	9,71530 +	9,93181 —
$3l^{\nu} = 223,5,9$	9,8345 —	9,8635 —
$4l^{\nu} = 297,26,52$	9,9481 —	9,6637 +
$5l^{\nu} = 11,48,35$	9,3110 +	9,9907 +

II. — Calcul des valeurs complètes de L, ϖ, θ et δa

Avec l'argument ζ et les valeurs de $\sin l^{\nu}$, $\cos l^{\nu}$..., la Table X donne les perturbations suivantes dues uniquement à l'action de Saturne :

$$C_0 + U_1 v + \ldots = +108'',60$$

$$S_1 + U_1 v + \ldots (\sin l^{\nu}) = -110'',96 + 0'',22 (\sin l^{\nu})^{(a)} = -106,65$$

$$C_1 + U_1 v + (\cos l^{\nu}) = +117,51 + 0,46 (\cos l^{\nu}) = +31,80$$

$$S_2 + U_1 v + (\sin 2l^{\nu}) = +27,88 - 0,03 (\sin 2l^{\nu}) = +14,46$$

$$C_2 + U_1 v + (\cos 2l^{\nu}) = +1,41 - 0,22 (\cos 2l^{\nu}) = -1,02$$

$$S_3 + U_1 v + (\sin 3l^{\nu}) = -1,37 - 0,02 (\sin 3l^{\nu}) = +0,95$$

$$C_3 + U_1 v + (\cos 3l^{\nu}) = -1,57 + 0,02 (\cos 3l^{\nu}) = +1,13$$

$$S_4 + U_1 v + (\sin 4l^{\nu}) = -2,44 + 0,01 (\sin 4l^{\nu}) = +2,16$$

$$C_4 + U_1 v + (\cos 4l^{\nu}) = -0,46 + 0,05 (\cos 4l^{\nu}) = -0,19$$

$$S_5 + U_1 v + (\sin 5l^{\nu}) = +0,07 + 0,01 (\sin 5l^{\nu}) = +0,02$$

$$C_5 + U_1 v + (\cos 5l^{\nu}) = +0,52 + 0,00 (\cos 5l^{\nu}) = +0,52$$

$$\delta L = C_0 + S_1 \sin l^{\nu} + \ldots = -165'',43$$

(*a*) Les sinus et cosinus entre parenthèses sont les facteurs par lesquels on doit multiplier la somme ou la différence des deux nombres qui les précèdent immédiatement.

Digitized by Google

$$C_0 + U_1 v + \ldots = + 0'',41$$
$$S_1 + U_1 v + \ldots (\sin l^v) = + 137'',98 + 0'',03 (\sin l^v) = \ldots + 132'',90$$
$$C_1 + U_1 v + (\cos l^v) = + 25,83 - 0,18 (\cos l^v) = + 6,91$$
$$S_2 + U_1 v + (\sin 2l^v) = - 14,56 + 0,17 (\sin 2l^v) = - 7,47$$
$$C_2 + U_1 v + (\cos 2l^v) = + 25,46 + 0,07 (\cos 2l^v) = - 21,82$$
$$S_3 + U_1 v + (\sin 3l^v) = + 3,42 + 0,00 (\sin 3l^v) = - 2,34$$
$$C_3 + U_1 v + (\cos 3l^v) = + 0,28 - 0,03 (\cos 3l^v) = - 0,18$$
$$S_4 + U_1 v + (\sin 4l^v) = - 0,13 + 0,03 (\sin 4l^v) = + 0,09$$
$$C_4 + U_1 v + (\cos 4l^v) = + 1,65 + 0,00 (\cos 4l^v) = + 0,76$$
$$S_5 + U_1 v + (\sin 5l^v) = - 0,46 - 0,00 (\sin 5l^v) = - 0,09$$
$$C_5 + U_1 v + (\cos 5l^v) = - 0,59 + 0,01 (\cos 5l^v) = - 0,37$$
$$\delta E = C_0 + S_1 \sin l^v + \ldots = + 108'',80$$
$$C_0 + U_1 v + \ldots = - 1'',54$$
$$S_1 + U_1 v + \ldots (\sin l^v) = + 27'',69 - 0'',17 (\sin l^v) = \ldots + 26'',50$$
$$C_1 + U_1 v + (\cos l^v) = - 133,86 - 0,05 (\cos l^v) = - 36,10$$
$$S_2 + U_1 v + (\sin 2l^v) = + 22,14 + 0,09 (\sin 2l^v) = + 11,54$$
$$C_2 + U_1 v + (\cos 2l^v) = + 16,27 - 0,12 (\cos 2l^v) = - 13,80$$
$$S_3 + U_1 v + (\sin 3l^v) = + 0,28 - 0,03 (\sin 3l^v) = - 0,17$$
$$C_3 + U_1 v + (\cos 3l^v) = - 3,42 - 0,00 (\cos 3l^v) = + 2,50$$
$$S_4 + U_1 v + (\sin 4l^v) = + 1,91 + 0,00 (\sin 4l^v) = - 1,69$$
$$C_4 + U_1 v + (\cos 4l^v) = - 0,35 + 0,00 (\cos 4l^v) = - 0,16$$
$$S_5 + U_1 v + (\sin 5l^v) = - 0,35 + 0,01 (\sin 5l^v) = - 0,07$$
$$C_5 + U_1 v + (\cos 5l^v) = + 0,52 + 0,00 (\cos 5l^v) = + 0,51$$
$$E\delta\tilde{\omega} = C_0 + S_1 \sin l^v + \ldots = - 12'',48$$
$$C_0 + U_1 v + \ldots = - 112'',5$$
$$S_1 + U_1 v + \ldots (\sin l^v) = - 87'',1 - 0,3 (\sin l^v) = - 84'',2$$
$$C_1 + U_1 v + (\cos l^v) = - 85,4 + 0,2 (\cos l^v) = - 23,0$$
$$S_2 + U_1 v + (\sin 2 l^v) = + 3,6 + 0,1 (\sin 2 l^v) = + 1,9$$
$$C_2 + U_1 v + (\cos 2 l^v) = + 2,4 + 0,0 (\cos 2 l^v) = - 2,1$$
$$S_3 + U_1 v + (\sin 3 l^v) = - 0,4 + 0,0 (\sin 3 l^v) = + 0,3$$
$$C_3 + U_1 v + (\cos 3 l^v) = + 3,2 - 0,0 (\cos 3 l^v) = - 2,3$$
$$S_4 + U_1 v + (\sin 4 l^v) = - 0,4 + 0,0 (\sin 4 l^v) = + 0,4$$
$$C^4 + U_1 v + (\cos 4 l^v) = - 1,7 + 0,0 (\cos 4 l^v) = - 0,8$$
$$\delta a = C_0 + S_1 \sin l^v + \ldots = - 222'',3$$

Digitized by Google

A ces perturbations périodiques, on doit réunir celles à longues périodes dépendant des arguments V, 2 V et W, et que fournit la Table IX. Or, en tenant compte des petites corrections données par la Table XXI, on a

$$\delta L = + 15',53'',05 \qquad \delta E = + 44'',32$$
$$E\delta\varpi = + \quad 65'',47 \qquad \delta a = + 33'',0.$$

On a donc pour les variations périodiques totale de δL, δE, $E\delta\varpi$ et δa

$$\begin{aligned}
\delta L &= - 2',45'',43 + 15',53'',05 &&= + 13',7'',62\\
\delta E &= + 44'',32 \quad + 108'',80 &&= + 153'',12\\
E\delta\varpi &= + 65'',47 \quad - 12'',48 &&= + 52'',99\\
\delta a &= + 33'',0 \quad - 222'',3 &&= - 189'',3.
\end{aligned}$$

Comme d'ailleurs (Table V)

$$E = 9964'',44, \qquad \log \frac{1}{E \sin 1''} = 1,3159720,$$

on en conclut pour $\delta\varpi$

$$\begin{aligned}
\log E\delta\varpi &= 1,7241939\\
\log \frac{1}{E \sin 1''} &= 1,3159720\\
\log \delta\varpi &= 3,0401659\\
\delta\varpi &= 0^0,18',16'',89.
\end{aligned}$$

En réunissant ces divers résultats à ceux que fournissent pour L, ϖ, θ et E les Tables I, III et V, on forme le tableau suivant :

	L	ϖ	θ	E
Table I...	112°,19',14'',28	12°,27',47'',0	99°,16',53'',4	
III	9,58,31,91	19,0	11,9	
V	+ 0,14	+ 0,4	+ 0,1	9964'',44
Table(IX + X)	13,7,62	18,16,9		+ 153,12
Σ	122,30,53,95	12,46,23,3	99,17,5,4	10117,56

Digitized by Google

et l'on a

$$\zeta = L - \tilde{\omega} = 109°,44',30'',65$$
$$\log E = 4,0050758.$$

III. — Coordonnées héliocentriques de la planète

Calcul de la partie périodique δs de la latitude

La Table XX construite en la même forme que celle X donne, avec ζ pour argument, la perturbation δs de la latitude due à l'action de Saturne. On trouve ainsi :

$$C_0 + U_1 v = +0'',04$$
$$S_1 + U_1 v + \ldots (\sin l^{v}) = -1'',93 + 0'',00 (\sin l^{v}) = -1,86$$
$$C_1 + U_1 v + \ldots (\cos l^{v}) = -0,31 - 0,01 (\cos l^{v}) = -0,09$$
$$S_2 + U_1 v + \ldots (\sin 2 l^{v}) = +3,67 + 0,00 (\sin 2 l^{v}) = +1,91$$
$$C_2 + U_1 v + \ldots (\cos 2 l^{v}) = -0,88 + 0,00 (\cos 2 l^{v}) = +0,75$$
$$S_3 + U_1 v + \ldots (\sin 3 l^{v}) = +0,05 + 0,00 (\sin 3 l^{v}) = -0,03$$
$$C_3 + U_1 v + \ldots (\cos 3 l^{v}) = +0,18 + 0,00 (\cos 3 l^{v}) = -0'',13$$
$$\delta s = C_0 + S_1 \sin l^{v} + \ldots = +0'',59$$

Calcul des corrections δv et δr

Avec les arguments des perturbations donnés dans le § I, et au moyen des Tables XIII, XIV et XV, on obtient

TABLES	PERT. PAR	ARGUMENTS	δv	δr
XIII	♀	$l' - l^{v} = 58^{s}$	+ 0,06	
»	♁	$l'' - l^{v} = 107$	+ 0,12	
»	♂	$l''' - l^{v} = 59$	+ 0,02	
XIV	♃	$l^{vi} - l^{v} = 59,7$ $l^{vi} = \ldots 195,1$	+ 0,49	+ 0,12
XV	♅	$l^{vii} - l^{v} = 320,6$ $l^{vii} = \ldots 56$	— 0,09	0,00
			+ 0,60	+ 0,12

Digitized by Google

Calcul de l'anomalie excentrique

Les formules (2) de la page 398 font connaître le rayon vecteur r et la longitude vraie v de la planète lorsque l'anomalie excentrique u est donnée. Mais l'équation qui exprime u étant transcendante, on ne peut obtenir la valeur de cet angle que par des approximations successives. Dans la formation des Éphémérides, où l'on peut toujours se procurer la suite non interrompue des valeurs de u, le calcul de cette variable s'effectue très rapidement au moyen des différences premières et des différences secondes des valeurs qui précèdent celle que l'on cherche. Considérons, par exemple, l'ensemble des valeurs de u qui se rapportent à l'année 1884, et soient, en ne considérant que les cinq dates qui précèdent celle du 30 avril,

	u	Δ	Δ_1
Janv. 15	+ 106°,11′,16″,17	+ 1°,14′,0″,46	− 5″,01
Mars 1	107,25,16,63	+ 1,13,55,45	− 5,50
» 16	108,39,12,08	+ 1,13,49,95	− 4,15
» 31	109,53,2,03	+ 1,13,45,80	
Avril. 15	111,6,47,83		

Il est clair qu'en prenant

$$u_0 = 111°,6',47'',83 + 1°,13',45'',80 - 5'',00$$
$$= 112°,20',28''63$$

on satisfera, à très peu près, à l'équation

$$109°,44',30'',65 + E \sin u = u,$$

Digitized by Google

et qu'ainsi u_0 sera une valeur très approchée de u. En effectuant le calcul de $E \sin u$, on trouve, en effet,

$$\log E = 4{,}0050758$$

$$\log \sin u = 9{,}9661117$$

$$\log E \sin u = 3{,}9711875$$

$$E \sin u = + 9358'',09 = + 2^\circ,35',58'',09$$

valeur qui, étant substituée dans la relation

$$L - \varpi + E \sin u - u_0 = \varepsilon,$$

donne $\varepsilon = + 0'',11$. Ainsi, on peut prendre pour la valeur cherchée de l'angle u

$$u = u_0 + 0'',11$$

ou

$$u = 112^\circ,20',28',74.$$

Calcul de la longitude vraie v

La formule à appliquer est

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - \varpi) = \sqrt{\frac{1 + E \sin 1''}{1 - E \sin 1''}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u,$$

et l'on a par la Table XI

$$\log \sqrt{\frac{1 + E \sin 1''}{1 - E \sin 1''}} = 0{,}0213199.$$

Au moyen de la valeur de u que nous venons de trouver,

Digitized by Google

on a donc

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = 0{,}1738063$$

$$\log \sqrt{\ldots} = 0{,}0213199$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (v - \tilde{\omega}) = 0{,}1951262$$

$$\frac{1}{2} (v - \tilde{\omega}) = 57^\circ{,}27'{,}32''{,}22$$

$$(v - \tilde{\omega}) = 114{,}55{,}4{,}44$$

$$\tilde{\omega} = 12{,}46{,}23{,}3$$

$$v = 127{,}41{,}27{,}74$$

$$\delta v = 0{,}60$$

$$v = 127{,}41{,}28{,}34$$

Calcul de la réduction à l'écliptique

Des valeurs de v et θ, on déduit

$$v - \theta = 28^\circ{,}24'{,}22''{,}9$$

et la Table XVI donne alors, avec cet angle pour argument,

$$U_0 = + 22''{,}61$$

$$U_1 v = + 0{,}07$$

$$\rho = - 22{,}54.$$

La valeur de la longitude v_1 réduite à l'écliptique est donc

$$v_1 = 127^\circ{,}41'{,}5''{,}80.$$

Digitized by Google

Calcul du rayon vecteur

Par l'application des formules (3) de la page 437, on trouve

$$\begin{aligned} \log \delta a &= 2{,}27715 - & \log a &= 0{,}7161605 + \\ \log \sin 1'' &= 4{,}68557 & \log E &= 4{,}0050758 + \\ \log \delta a \sin 1'' &= 6{,}96272 - & \log \sin 1'' &= 4{,}6855749 + \\ \delta a \sin 1'' &= -0{,}000918 & \log \cos u &= 9{,}5799944 - \\ const &= +5{,}202800 & \log(-aE \sin 1' \cos u) & \\ a &= +5{,}201882 & &= 8{,}9867366 - \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a &= +5{,}201882 \\ -aE\ldots &= +0{,}096992 \\ r &= +5{,}298874 \\ \delta r &= +\quad 12 \\ r &= +5{,}298886 \\ \log r &= 0{,}7241846 \end{aligned}$$

Calcul de la latitude héliocentrique

La Table V donne pour l'époque $1884 + f$

$$\varphi_1 = 1°,18',34'',32, \quad \log \sin \varphi_1 = 8{,}358956\,;$$

on a ensuite

$$\sin s = \sin \varphi_1 \sin (v - \theta_1) + \delta s,$$

$$\begin{aligned} \log \sin \varphi_1 &= 8.358956 \\ \log \sin (v - \theta_1) &= 9{,}677353 + \\ \log \sin s &= 8{,}036309 \\ s &= +0°,37',22'',55 \\ \delta s &= +0{,}59 \\ s &= +0'',37',23{,}14. \end{aligned}$$

Digitized by Google

En résumé, les coordonnées héliocentriques de Jupiter à l'époque 1884, 30 avril, midi moyen, sont :

Longitude réduite à l'écliptique .	127°,41′,5″,80.
Latitude.	0,37,23,14 boréale,
Rayon vecteur.	5,298886.

La détermination des coordonnées héliocentriques de Saturne donnant lieu à des calculs entièrement semblables à ceux que nous venons de faire pour Jupiter, nous nous dispenserons d'en présenter ici une application.

Digitized by Google

CHAPITRE II

Lieux héliocentriques des planètes dont les orbites sont intérieures à celle de Jupiter

I. — Première application. — Calcul des lieux héliocentriques de mercure

Le mode de construction adopté dans les Tables des planètes Mercure, Vénus, la Terre [a] et Mars est un peu différent de celui qu'on a suivi dans les Tables de Jupiter et de Saturne. On suppose à l'astre un mouvement circulaire et uniforme, ce qui fait connaître son mouvement moyen et détermine sa longitude L. En retranchant de cet angle la longitude $\tilde{\omega}$ du périhélie, on obtient l'anomalie moyenne $\zeta = L - \tilde{\omega}$, et l'on se sert de cet angle comme argument pour calculer l'équation du centre $\mathcal{E}$ et la partie de sa variation séculaire qui est proportionnelle au temps. En ajoutant alors à l'angle $L + \mathcal{E}$ la somme P_0 des perturbations périodiques de la longitude, on obtient la longitude comptée dans l'orbite ou la longitude vraie v de la planète. Cet angle obtenu on en retranche la longitude θ du nœud ascendant et l'on a l'argument $v - \theta$ au

(a) Dans notre *Traité d'Astronomie pratique*, Partie II, chap. II, nous avons exposé les deux méthodes auxquelles on peut avoir recours pour calculer les lieux du Soleil, et nous avons donné, de chacune d'elles, une application numérique. Nous y renvoyons le lecteur.

Digitized by Google

moyen duquel on détermine la réduction à l'écliptique ρ, la latitude s et les parties séculaires de ces éléments qui varient proportionnellement au temps. Quant au rayon vecteur, il est donné par un calcul semblable à celui de la latitude, mais en prenant pour argument l'angle ζ au lieu de la distance $v - \theta$.

Les parties principales des éléments ε, ρ, s et r sont données dans les Tables pour toutes les valeurs des arguments ζ et $v - \theta$ comprises entre 0° et 360°; et ces valeurs varient de dix en dix minutes pour l'équation du centre et le rayon vecteur, et de degré en degré seulement pour la réduction à l'écliptique et pour la latitude. Il en résulte que, dans la détermination de ces éléments, on doit calculer d'abord une partie proportionnelle destinée à compléter la mesure de l'argument donné, et joindre ensuite à ce terme la correction que fournissent les différences secondes, correction qui pour ε, ρ et s est assez sensible. Si l'on désigne donc par

$\mathcal{E}_0$ ρ_0... les parties principales des éléments $\mathcal{E}$, ρ... respectivement;

τ la fraction de l'argument ζ ou de celui $v - \theta$;

$\tau' = \frac{\tau(\tau - 1)}{1.2}$;

Δ et Δ_1, les différences premières et secondes données dans les Tables;

ν la variation séculaire de l'un quelconque des éléments $\mathcal{E}_0$, ρ_0 ou r_0

$t + f$ le temps écoulé depuis l'époque 1850,0;

on aura pour calculer la longitude v_1 réduite à l'écliptique et comptée à partir de l'équinoxe vrai

$$(\alpha) \qquad v_1 = L + [\mathcal{E}_0 + \tau\Delta + \tau'\Delta_1 + \nu(t + f)] + P_0 + [\rho_0 + \tau\Delta + \tau'\Delta_1 + \nu(t + f)] + N,$$

Digitized by Google

N étant la nutation luni-solaire dont la valeur est donnée dans les Tables du Soleil.

On aura ensuite pour la latitude et le rayon vecteur

$$(\beta) \qquad s = [s_0 + \tau\Delta + \tau'\Delta_1 + \nu\,(t + f)] + P_s,$$

$$(\gamma) \qquad r = [r_0 + \tau\Delta + \tau'\Delta_1 + \nu\,(t + f)] + P_r,$$

P_s et P_r désignant respectivement les sommes des perturbations périodiques de la latitude et du rayon vecteur dues aux actions planétaires.

Pour donner, au moyen des Tables, une application des formules qui précèdent, proposons-nous de calculer la position héliocentrique de Mercure pour le midi moyen de Paris, au 30 juin 1884.

Arguments des inégalités

On a

$$f = 0{,}495, \qquad t + f = 34{,}495.$$

		L	$\tilde{\omega}$	θ
Table	I	26°,23′,36″,68	75°,38′,54″,92	46°,57′,18″,55
	III	20,43,12,87	27,71	21,13
	V	+ 0,13	+ 0,13	+ 0,10
	Σ	47 ,6, 49,68	75,39,22,76	46,57,39,78

$$\zeta = L - \tilde{\omega} = 331°,27',26'',92.$$

Puis

$l = 518$	$2\delta' + l = 1501$	$\delta' + 4l' = 2529$
$l' = 3009$	$3\delta' + l = 3992$	
$\delta' = 2491$	$5\delta' + 2l = 1492$	$\delta' = l' - l$
$l'' = 3094$	$5\delta' + 3l = 2010$	
$\delta'' = 2576$	$5\delta' + 4l = 2529$	$\delta'' = l'' - l$
$l^{\text{IV}} = 1410$	$4\delta'' + 3l = 3857$	
$\delta^{\text{IV}} = 892$	$2\delta^{\text{IV}} + l = 2301$	$\delta^{\text{IV}} = l^{\text{IV}} - l$
$l^{\text{V}} = 849$	$2\delta^{\text{V}} + l = 1182$	
$\delta^{\text{V}} = 331$	$3\delta' + 2l' = 1492$	$\delta^{\text{V}} = l^{\text{V}} - l$

Digitized by Google

Calcul de l'équation du centre

Les données fournies par la Table VI sont les suivantes :

$$\mathcal{E}_0 = -14^\circ,23',12'',34$$
$$\tau = 0,74487, \qquad \Delta = 247'',38,$$
$$\tau' = -0,095, \qquad \Delta_1 = 0,85,$$
$$\nu = -6'',41, \qquad t + f = 34,495;$$

on a donc

Tab. VI $\mathcal{E}_0 = \ldots$	$-$	$14^\circ,23',12'',34$
Correct. diff. 1re $\tau\,\Delta =$	$+$	$3\,,\ 4\,,27$
Correct. diff. 2e $\tau'\Delta_1 =$	$-$	$0\,,08$
Var. sécul. $\nu\,(t + l) =$	$-$	$2\,,21$
$\mathcal{E} = \ldots$	$-$	$14\,,20\,,10\,,36$

Inégalités de la longitude. — Calcul de P_0

Au moyen des arguments donnés dans le tableau ci-dessus, on trouve

TABLES	ARGUMENTS		P_0
VIII	♀	$2\delta' + l$	$-$ 328
IX		$3\delta' + l$	$+$ 131
X		$5\delta' + 2l$	$+$ 38
XI		$5\delta' + 3l$	$+$ 420
XII		$5\delta' + 4l$	$+$ 132
XIII		δ' et l	$-$ 360
XIV	♂	$4\delta'' + 3l$	$-$ 38
XV		δ'' et l''	$-$ 146
XVI	♃	$2\delta^{\text{v}} + l$	$-$ 244
XVII		δ^{iv} et l^{iv}	$-$ 9
XVIII	♄	$2\delta^{\text{v}} + l$	$-$ 20
XIX		δ^{v} et l^{v}	$-$ 6
		$\Sigma = \ldots$	$-$ 430

Digitized by Google

Ajoutant cette valeur de P_0 à $L + \mathcal{E}$, on obtient

$$\begin{aligned} L &= +\ 47^\circ,\ 6',49'',68 \\ \mathcal{E} &= -\ 14\ ,20\ ,10\ ,36 \\ P_0 &= -\qquad\quad 4\ ,30 \\ v = L + \mathcal{E} + P_0 &= \quad 32\ ,46\ ,35\ ,02\,; \end{aligned}$$

et de là on conclut

$$v - \theta = 345^\circ,48',55'',24.$$

Calcul de la réduction à l'écliptique

Avec cette valeur de $v - \theta$, la Table XX donne

$$\rho_0 = +\ 6',24'',80,$$

$$\begin{aligned} \tau &= +\ 0{,}81534, & \Delta &= -\ 23{,}52, \\ \tau' &= -\ 0{,}077, & \Delta_1 &= -\ 0{,}44, \\ \nu &= \quad 0{,}20, & t + f &= \quad 34{,}495\,; \end{aligned}$$

on a par suite

$$\begin{aligned} \text{Table XX} \ldots\ \rho_0 &= +\ 6',24'',80 \\ \text{Correct. diff. } 1^{re}\ \tau\Delta &= -\qquad 19\ ,18 \\ \text{Correct. diff. } 2^{e}\ \tau'\Delta_1 &= +\qquad 0\ ,03 \\ \text{Var. sécul. } \nu\,(t+f) &= +\qquad 0\ ,07 \\ \rho = \ldots &+\ 6',5'',72 \end{aligned}$$

et

$$v_1 = v + \rho = 32^\circ,52',40'',74.$$

Cette valeur de v_1 est comptée à partir de l'équinoxe *moyen*. On la rapporterait à l'équinoxe *vrai* en lui ajoutant la nutation luni-solaire $N = +\ 6'',07$ donnée dans les Tables du Soleil.

Digitized by Google

On aurait ainsi

$$v_1 = 32°,52',46'',81.$$

Calcul de la latitude

La Table XXI, dans laquelle on entre avec l'angle $v - \theta$ pour argument, donne d'abord

$$s_0 = -1°,48',29'',09.$$

On a ensuite

$$\tau = +0,81534, \qquad \Delta = +425,08,$$
$$\tau' = -0,077, \qquad \Delta_1 = +1,82,$$
$$\nu = -0,20, \qquad (t+f) = 34,495;$$

par conséquent

Table XXI... s_0	$= -1°,48',29'',09$
Correct. diff. 1re $\tau\Delta$	$= +5,46,58$
Correct. diff. 2e $\tau'\Delta_1$	$= -0,14$
Var. sécul. $\nu\,(t+f)$	$= -0,53$
s	$= -1°,42',43'',18$

Calcul du rayon vecteur

Au moyen des arguments des inégalités donnés plus haut, on trouve

TABLES	PERT. PAR	ARGUMENTS	P_r
XXVIII		$3\delta' + 2l'$	-25
XXIX	♀	$\delta' + 4l'$	$+7$
XXX		l' et δ'	-8
XXXI	♂	l'' et δ''	$+5$
XXXII	♃	l^{IV} et δ^{IV}	$+29$
XXXIII	♄	l^{V} et δ^{V}	-3
		$\Sigma =$	$+5$

Digitized by Google

On a ensuite, Table XXVII,

$$\begin{aligned}
\text{Table XXVII } r_0 &= +\ 0{,}3223111 \\
\text{Correct. diff. } 1^{re}\ \tau\Delta &= -\ \ 1201 \\
\text{Correct. diff. } 2^{e}\ \tau'\Delta_1 &= \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \\
\text{Var. sécul. } \nu\,(t+f) &= -\ \ \ \ \ \ 20 \\
P_r &= +\ \ \ \ \ \ \ \ \ 5 \\
r &= +\ 0{,}3221895.
\end{aligned}$$

II. — Seconde application. — Calcul des lieux héliocentriques de Vénus

Les Tables du mouvement de Vénus sont construites en la même forme que celles de Mercure ; leur application donne donc lieu à des calculs semblables à ceux que nous venons d'effectuer pour cette dernière planète. En voici un nouvel exemple pour le 1er janvier 1884 à midi moyen de Paris, et par rapport à l'équinoxe moyen de la même époque

On a

$$f = 0{,}000, \quad t = 34,$$

puis

Arguments simples	*Arguments composés*
(1) $l = 228$	(12) $l'' + 2\delta'' = 3762$
(2) $l' = 3787$	(13) $l'' + 3\delta'' = 1087$
(3) $\delta' = 3499$	(14) $l'' + 4\delta'' = 2412$
(4) $l'' = 1112$	(15) $2l'' + 3\delta'' = 2199$
(5) $\delta'' = 1325$	(16) $l'' + 5\delta'' = 3737$
(6) $l''' = 1235$	(17) $3l'' + 5\delta'' = 1961$
(7) $\delta''' = 1448$	(18) $13l'' - 8l' = 160$
(8) $l^{vi} = 1246$	(19) $2l''' + \delta''' = 3918$
(9) $\delta^{iv} = 1459$	(20) $l''' + 2\delta''' = 131$
(10) $l^{v} = 782$	(21) $l^{v} + \delta^{v} = 1777$
(11) $\delta^{v} = 995$	

Digitized by Google

Ces arguments obtenus, on procède aux calculs suivants :

Sommes P_0, P_s *et* P_r *des perturbations périodiques de la longitude, de la latitude et du rayon recteur.*

TABLES	ARGUMENTS	PERT.	TABLES	ARGUMENTS	PERT.
VIII	(2) et (3)	— 22	XXX	(2) et (3)	+ 2
IX	(5)	— 533	XXXI	(5)	— 211
X	(12)	— 294	XXXII	(14)	— 15
XI	(13)	+ 2	XXXIII	(2) et (18)	0
XII	(14)	+ 115	XXXIV	(4) et (5)	— 4
XIII	(15)	+ 81	XXXV	(6) et (7)	— 10
XIV	(16)	+ 17	XXXVI	(8) et (9)	— 38
XV	(17)	— 18	XXXVII	(10) et (11)	0
XVI	(4) et (5)	— 21		$P_r =$	— 276
XVII	(2) et (18)	— 147			
XVIII	(19)	+ 111	XXVI	(4) et (5)	— 20
XIX	(20)	— 44	XXVII	(8) et (9)	+ 3
XX	(6) et (7)	+ 6	XXVIII	(21)	— 1
XXI	(9)	+ 308		$P_s =$	— 18
XXII	(8) et (9)	— 195			
XXIII	(10) et (11)	+ 23			
	$P_0 =$	— 611			

Cacul de la longitude, de la latitude et du rayon vecteur

On a d'abord par l'emploi des Tables I, III et V

1884	L	ϖ	θ
Table I	341°,17′,6″,91	129°,55′,16″,1	75°,38′,30″,5
III	0	0	0
V	+ 0,08	— 0,66	+ 0,14
Σ	341,17,6,99	129,55,15,44	75,38,30,64

Digitized by Google

d'où l'on conclut

$$\zeta = L - \varpi = 211^\circ,21',51'',55.$$

Avec cet argument, la Table VI donne

$$\begin{aligned} \text{Table VI } \mathcal{E}_0 &= \ldots - 0^0,24',17'',39 \\ \tau\Delta &= \ldots - \quad 1,39 \\ \tau'\Delta_1 &= \ldots \quad 0,00 \\ \nu t &= \ldots + \quad 3,88 \\ \mathcal{E} &= \ldots - \quad 0,24,14,90\ ; \end{aligned}$$

on a donc

$$v = L + \mathcal{E} + P_0 = 340^0,52',45'',98,$$

et

$$v - \theta = 265^\circ,14',15'',34$$

On a d'ailleurs, Table XXIV,

$$\begin{aligned} \text{Table XXIV } \rho_0 &= \ldots - 31'',45 \\ \tau\Delta &= \ldots + \quad 1,48 \\ \tau'\Delta_1 &= \ldots \quad 0,00 \\ \nu t &= \ldots - \quad 0,01 \\ \rho &= \ldots - \quad 29,98 \end{aligned}$$

Ainsi

$$v_1 = v + \rho = 340^0,\ 52',16'',00$$

On a maintenant, Table XXV,

		Latitude hélioc.	*Rayon vecteur*
Partie principale		$= -3^0,22',48'',30$	0,7275693
Partie proport.	$\tau\Delta =$	$-$ 3,98	$-$ 14
Correct.	$\tau'\Delta_1 =$	$-$ 0,34	0
Var. sécul.	$\nu t =$	$-$ 1.53	$-$ 114
Perturb.	$=$	$-$ 0,18	$-$276
		$s = -3,22,54,33$	$r = 0.7275289$

Digitized by Google

En résumé, les valeurs des coordonnées que nous avions à déterminer sont les suivantes :

Époque : 1884 janvier 1, midi moyen de Paris. Equin. moyen

Coordonnées héliocentriques de Vénus

Longitude	340°,52′,16″,00
Latitude	3,22,54,33 aust.
Rayon vecteur ...	0,7275289

III. — Troisième application. — Calcul des lieux héliocentriques de mars

Proposons-nous encore de calculer le lieu héliocentrique de Mars pour le 1er mars 1884, à midi moyen de Paris et par rapport à l'équinoxe moyen de la même époque.

Arguments des perturbations

On a

$$f = 0{,}164, \qquad t + f = 34{,}164,$$

		L	ω	θ
Table	I	111°,35′,23″,83	333°,55′,25″,8	48°,39′,44″,8
	III	31,26,39,35	10,9	4,6
	V	+ 25,77	+ 0,1	— 0,3
	Σ	143,2,28,95	333,55,36,8	48,39,49,1

Digitized by Google

d'où

$$\zeta = L - \tilde{\omega} = 169°,6',52'',15.$$

On a ensuite

(1)	$l' = 855$	(17)	$2l''' + 3\delta'' = 2613$
(2)	$l'' = 1769$	(18)	$3l''' + 2\delta'' = 382$
(3)	$l''' = 1584$	(19)	$3l''' + 4\delta'' = 12$
(4)	$\delta' = 729$	(20)	$4l''' + 5\delta'' = 1411$
(5)	$\delta'' = 3815$	(21)	$5l''' + 6\delta'' = 2810$
(6)	$l^{\text{IV}} = 1301$	(22)	$6l''' + 7\delta'' = 209$
(7)	$\delta^{\text{IV}} = 3717$	(23)	$7l''' + 8\delta'' = 1608$
(8)	$l^{\text{V}} = 804$	(24)	$8l''' + 9\delta'' = 3007$
(9)	$\delta^{\text{V}} = 3220$	(25)	$l^{\text{IV}} + \delta^{\text{IV}} = 1018$
(10)	$l^{\text{VI}} = 1943$	(26)	$l^{\text{IV}} - 2\delta^{\text{IV}} = 1867$
(11)	$\delta^{\text{VI}} = 359$	(27)	$l^{\text{IV}} + 2\delta^{\text{IV}} = 735$
(12)	$2l''' + \delta' = 3897$	(28)	$l^{\text{IV}} - 3\delta^{\text{IV}} = 2150$
(13)	$3l''' + \delta' = 1481$	(29)	$2l^{\text{IV}} + \delta^{\text{IV}} = 2319$
(14)	$l''' + \delta'' = 1399$	(30)	$3l^{\text{IV}} + \delta^{\text{IV}} = 3620$
(15)	$l''' + 2\delta'' = 1214$	(31)	$l^{\text{V}} + \delta^{\text{V}} = 24$
(16)	$2l''' + \delta'' = 2983$		

Sommes P_0 *et* P_r *des inégalités de la longitude et du rayon vecteur*

Au moyen des arguments qui précèdent, on obtient les perturbations périodiques de la longitude et du rayon vecteur dont P_0 et P_r représentent respectivement les sommes. On a ainsi

Digitized by Google

TABLES	ARGUMENTS	P_0	TABLES	P_r
VIII	(12)	— 547	XLVI	— 14
IX	(13)	+ 38	XLVII	— 17
X	(3) et (5)	— 78	XLVIII	+ 6
XI	(5)	+ 154	XLIX	— 169
XII	(14)	+ 13	L	— 59
XIII	(15)	— 442	LI	+ 171
XIV	(16)	+ 58	LII	+ 45
XV	(17)	+ 206	LIII	— 36
XVI	(18)	— 37	LIV	— 9
XVII	(19)	— 110	LV	+ 3
XVIII	(20)	+ 55	LVI	+ 4
XIX	(21)	— 26		
XX	(22)	+ 17		
XXI	(23)	— 18		
XXII	(24)	— 6		
XXIII	(3) et (5)	+ 56	LVII	— 5
XXIV	(7)	+ 382	LVIII	+ 199
XXV	(25)	—1871	LIX	+ 296
XXVI	(26)	+ 69	LX	— 103
XXVII	(6)	— 75	LXI	+ 123
XXVIII	(27)	— 82	LXII	— 113
XXIX	(28)	— 132	LXIII	+ 52
XXX	(3)	+ 1	LXIV	+ 86
XXXI	(29)	+ 155	LXV	+ 54
XXXII	(30)	+ 36		
XXXIII	(6) et (7)	— 4	LXVI	— 1
XXXIV	(6) et (7)	— 8	LXVII	— 25
XXXV	(9)	— 86	LXVIII	+ 37
XXXVI	(31)	— 94	LXIX	— 49
XXXVII	(8) et (9)	+ 59	LXX	— 11
XXXVIII	(10) et (11)	+ 7	LXXI	+ 2
	Σ. . .	—2300	Σ. . .	+ 407

Digitized by Google

Somme P_s *des perturbations de la latitude*

La somme P_s des inégalités qui affectent la longitude héliocentrique de Mars est donnée par les Tables XLI - XLIV; et l'on a dans notre exemple

TABLES	ARGUMENTS	P_s
XLI	(3) et (4)	— 3
XLII	(3) et (5)	— 6
XLIII	(6) et (7)	— 55
XLIV	(31)	— 2
	Σ ...	— 66

Longitude héliocentrique. — Calcul de l'équation du centre

La Table VI, dans laquelle on entre avec l'anomalie moyenne pour argument, donne

$$\begin{aligned}
\text{Table VI } \mathcal{E}_0 &= \ldots + 1^\circ,49',43'',49 \\
\text{Correct. diff. } 1^{re}\ \tau\Delta &= - \quad 1,\ 7,93 \\
\text{Correct. diff. } 2^e\ \tau'\Delta_1 &= \quad 0 \\
\text{Var. sécul. } \nu\,(t+f) &= + \quad 2,04 \\
\mathcal{E} &= \ldots + 1^\circ,48',37'',60
\end{aligned}$$

On a ainsi pour la longitude v comptée dans l'orbite

$$v = L + \mathcal{E} + P_0 = 144^\circ,50',43'',55,$$

et pour la distance $v - \theta$ de la planète au nœud ascendant

$$v - \theta = 96^\circ,10',54'',45.$$

Digitized by Google

Réduction à l'écliptique.

Au moyen de cet angle pris pour argument, la Table XXXIX donne

Table XXXIX $\rho_0 =$	... +	11″,19
Correct. diff. 1re $\tau\Delta =$	+	0 ,33
Correct. diff. 2e $\tau'\Delta_1 =$	+	0
Var. sécul. $\nu\,(t+f) =$	+	0
$\rho =$	+	11 ,52;

et l'on a pour la longitude héliocentrique v_1

$$v_1 = v + \rho = 144°,50',55'',07.$$

Latitude héliocentrique

On a par la Table XL

Table XL $s_0 =$	... +	1°,50′,25″,77
Correct. diff. 1re $\tau\Delta =$	—	2,39
Correct. diff. 2e $\tau'\Delta_1 =$	+	0,15
Var. sécul. $\nu\,(t+f) =$	—	0,83
$s =$	... +	1 ,50 ,22,70.

Ajoutant à cette valeur de s la perturbation totale P_s, on a donc

$$s = +\,1°,50',22'',04.$$

Digitized by Google

Rayon vecteur

Avec l'argument $v - \theta$ et au moyen de la Table XLV, on a

Table XLV	$r_0 =$	$+ 1,6636050$
Correct. diff. 1re $\tau\Delta$	$=$	$+ 451$
Correct. diff. 2^e $\tau'\Delta_1$	$=$	$+ 1$
Var. sécul. $\nu\,(t + f)$	$=$	$+ 491$
P_r	$=$	$+ 407$
r	$=$	$+ 1,6637400.$

Ainsi, les coordonnées héliocentriques de Mars, à l'époque que nous avons considérée, sont :

Longitude hélioc. v_1	...	$144^0,50',55'',07$
Latitude hélioc. s	...	1,50,22,04 boré.
Rayon vecteur r	...	1,6637400.

Digitized by Google

CHAPITRE III

Calcul des positions héliocentriques d'Uranus et de Neptune

I. — Lieux héliocentriques d'Uranus. — Formules générales

La méthode suivie dans la détermination des perturbations mutuelles d'Uranus et de Neptune est la même que celle qui a été employée dans le cas de Jupiter et de Saturne. Les résultats ont été donnés sous la même forme générale, et les Tables générales qu'on en a déduites [a] présentent une disposition semblable à celle des autres Tables planétaires.

Soient

L, la longitude moyenne d'Uranus, augmentée de ses inégalités à longues périodes;

(a) Ces Tables d'Uranus et de Neptune par Le Verrier ont été adoptées à partir de 1878 par la rédaction du *Nautical Almanach*, et, un peu plus tard, par celle de la *Connaissance des Temps*. Avant cette époque, on se servait des Tables que M. Simon Newcomb à fait paraître successivement dans les mémoires de l'Institution Smithsonienne (*Smithsonian contributions to knowledge*, 1865 et 1873). Ces Tables, *tout aussi exactes* que celles de Le Verrier, ont, sur ces dernières, l'avantage d'être plus expéditives et d'un usage fort commode.

Digitized by Google

$\mathcal{E}$, l'équation du centre ;

$\mathcal{P}_s$, la somme des perturbations périodiques dues aux actions de Jupiter, Saturne et Neptune ;

$\mathfrak{T}$, l'ensemble des termes complémentaires ;

ρ, la réduction à l'écliptique.

On aura pour calculer la longitude réduite à l'écliptique ou la longitude héliocentrique v_1

$$(a) \qquad v_1 = \mathrm{L} + \mathcal{E} + \mathcal{P}_s + \mathfrak{T} + \rho.$$

Le rayon vecteur r, calculé dans l'ellipse, a pour formule, page 96,

$$(b) \qquad \begin{aligned} \frac{r}{a} = \mathrm{B} &+ \mathrm{B}_1 \cos(\mathrm{L} - \tilde{\omega}) \\ &+ \mathrm{B}_2 \cos 2(\mathrm{L} - \tilde{\omega}) \\ &+ \mathrm{B}_3 \cos 3(\mathrm{L} - \tilde{\omega}) \\ &+ \mathrm{B}_4 \cos 4(\mathrm{L} - \tilde{\omega}) \\ &+ \mathrm{B}_5 \cos 5(\mathrm{L} - \tilde{\omega}) \end{aligned}$$

En ajoutant à cette valeur de $\frac{r}{a}$ la partie périodique $\frac{\delta r}{a}$ provenant des actions de Jupiter, Saturne et Neptune, on la rapportera au cas du mouvement troublé, et l'on aura

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= 19{,}183390 + \delta a \sin 1'', \\ \log r &= \log a + \log\left[\frac{r}{a} + \frac{\delta r}{a}\right]. \end{aligned} \right.$$

Quant à la latitude s, elle est déterminée par la formule

$$(d) \qquad \sin s = \sin \varphi_1 \sin(v - \theta) + \delta s$$

dans laquelle δs représente l'ensemble des termes périodiques dus à l'action de Jupiter, de Saturne et de Neptune.

Digitized by Google

II. — Longitude héliocentrique

Tableau des arguments

Pour donner au moyen des Tables une application des formules (*a*), (*b*), (*c*) et (*d*) qui précèdent, nous allons nous proposer de déterminer la position héliocentrique d'Uranus pour le 13 septembre 1884, à midi moyen à Paris.

On a d'abord

$$f = 0{,}701, \quad \upsilon = \frac{34{,}701}{500} = 0{,}0694, \quad \upsilon^2 = 0{,}0048$$

$$u = \frac{34{,}701}{100} = 0{,}3470, \quad u^2 = 0{,}1204\,;$$

on a ensuite

Arguments simples

	l^{IV}	l^{V}	l^{VI}	l^{VII}
Tab. I	124,27	78,20	194,4126	54,2685
III	23,63	9,52	3,3368	1,7015
Σ	147,90	87,72	197,7494	55,9700

Arguments composés

$$l^{V} - l^{IV} = 339^{\circ},82, \qquad \zeta = l^{VI} - l^{IV} = 49^{\circ},8494$$

$$l^{V} + l^{IV} = 235\ ,62, \qquad \zeta' = l^{VI} - l^{V} = 110\ ,0294$$

$$2l^{V} + l^{IV} = 323\ ,34, \qquad \zeta'' = l^{VII} - l^{VI} = 258\ ,2206$$

$$x' = l^{VI} + \zeta' = 2l^{VI} - l^{V} = 307^{\circ},7788$$

$$y' = 2l^{VI} + \zeta' = 3l^{VI} - l^{V} = 105\ ,5282$$

$$x'' = l^{VI} + 3\zeta'' = 3l^{VII} - 2l^{VI} = 172\ ,4612$$

Digitized by Google

Inégalités à longues périodes de la longitude moyenne de l'excentricité et de la longitude du périhélie

Ces termes se rapportent au calcul de la longitude vraie ; ils sont donnés par la Table IX, et l'on a pour l'époque 1884,701

$$\delta L = -51',11'',09 \qquad E\delta\tilde{\omega} = -422,428$$
$$\delta E = +138,39 \qquad \delta\omega = -2^\circ,31',57'',38.$$

En réunissant ces résultats à ceux que fournissent pour L, $\tilde{\omega}$, θ et E les Tables I, III et V, on trouve

TABLES	L	$\tilde{\omega}$	θ	E
I	175°,26',43'',51	171°,20',24'',6	73°,24', 8'',3	
III	3 , 0 ,46 ,35	37 ,5	12 ,7	9556'',70
V	+ 13	0	+ 5	
IX	—0 ,51 ,11 ,09	—2 ,31,57 ,38		138 ,39
Σ	177 ,36 ,18 ,90	168 ,49, 4 ,72	73 ,24 ,21 ,5	9695 ,09

On conclut de là

$$\begin{aligned} L - \tilde{\omega} &= 8^\circ,47',14'',18 \\ 2(L - \tilde{\omega}) &= 17\ ,34\ ,28\ ,36 \\ 3(L - \tilde{\omega}) &= 26\ ,21\ ,43 \\ 4(L - \tilde{\omega}) &= 35\ ,9 \\ 5(L - \tilde{\omega}) &= 43\ ,56. \end{aligned}$$

Calcul de l'équation du centre

L'équation du centre $\mathcal{E}$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = {} & E_1 \sin (L - \tilde{\omega}) \\ & + E_2 \sin 2 (L - \tilde{\omega}) \\ & + E_3 \sin 3 (L - \tilde{\omega}) \\ & + E_4 \sin 4 (L - \tilde{\omega}) \\ & + E_5 \sin 5 (L - \tilde{\omega}) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

que nous avons rapportée page 399. La Table X, dans laquelle on entre avec l'excentricité E pour argument, fournit les logarithmes des coefficients E_1, E_2..., coefficients qui sont des fonctions des diverses puissances de E. D'après les valeurs de de $L - \tilde{\omega}$, $2(L - \tilde{\omega})$... que nous venons d'obtenir, on aura donc

$\log E_1 = 4{,}2874619$	$\log E_2 = 2{,}75523$
$\log \sin (L - \tilde{\omega}) = 9{,}1840276$	$\log \sin 2(L - \tilde{\omega}) = 9{,}47993$
$\Sigma \quad 3{,}4714895$	$\Sigma \quad 2{,}23516$
$n.c. = 2961'',35$	$n.c. = 171'',85,$

$\log E_3 = 1{,}3650$	$\log E_4 = 0{,}033$	$\log E_5 = 8{,}733$
$l \sin 3(L - \tilde{\omega}) = 9{,}6474$	$l \sin 4(L - \tilde{\omega}) = 9{,}760$	$l \sin 5(L - \tilde{\omega}) = 9{,}841$
$\Sigma = 1{,}0124$	$\Sigma = 9{,}793$	$\Sigma = 8{,}574$
$n.c. = 10'',29$	$n.c. = 0'',62$	$n.c. = 0'',04$

et, par suite,

$$\mathcal{E} = 3144'',15 = 52',24'',15.$$

Perturbations périodiques de la longitude vraie

Ces perturbations produites par Jupiter, Saturne et Neptune sont représentées, pour chacune des actions perturbatrices, par une expression de la forme

$$100\,\delta v = C_0 + S_1 \sin l^{\text{VI}} + C_1 \cos l^{\text{VI}} + S_2 \sin 2\, l^{\text{VI}} + C_2 \cos 2\, l^{\text{VI}}.$$

En effectuant le calcul de cette formule au moyen des Tables XI-XIII, on trouve

Digitized by Google

Action de ♃ : Argument $\zeta = l^{VI} - l^{IV}$.

Table XI	C_0	S_1	C_1	S_2	C_2
	— 36,33	+ 4,58	— 18	— 31	— 21
U_1u...	— 3	— 1	— 1	— 1	
U_2u^2...	— 1				
Σ . . .	— 36,37	+ 4,57	— 19	— 32	— 21

Action de ♄ : Argument $\zeta' = l^{VI} - l^{IV}$

Table XII	C_0	S_1	C_1	S_2	C_2	S_3
	— 23,45	— 29	— 2,79	— 27	+ 31	+ 3,95
U_1u . . .	— 1	— 1	— 17	— 2	— 1	— 5
U_2u^2. . .			+ 1			+ 1
Σ_1	— 23,46	— 30	— 2,95	— 29	+ 30	+ 3,91

	C_3	S_4	C_4	S_5	C_5
	+ 4,39	— 28	— 16	+ 1	+ 3
U_1u . . .	+ 3				
U_2u^2. . .	+ 1				
Σ_1	+ 4,43	— 28	— 16	+ 1	+ 3

Action de ♅ : Argument $\zeta'' = l^{VII} - l^{VI}$.

Table XIII	C_0	S_1	C_1	S_2	C_2	S_3	C_3
	+8,22	—6,34	—2,52	—19	+2,85	—29	—9
U_1u .	+ 2	— 2		+ 1	+ 2		
U_2u^2.	0						
Σ_2. .	+8,24	—6,36	—2,52	—18	+2,87	—29	—9

Faisant pour chaque coefficient C_0, S_1, C_1..., la somme

Digitized by Google

$\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$, on a donc

$$C_0 = -51'',59$$

$S_1 = -2,09$	$C_3 = +4'',34$
$C_1 = -5,66$	$S_4 = -0,28$
$S_2 = -0,79$	$C_4 = -0,16$
$C_2 = +2,96$	$S_5 = +0,01$
$S_3 = +3,62$	$C_5 = +0,03$

Ces coefficients obtenus, on formera le tableau suivant :

ARGUMENTS	sin / cos	LONGITUDE Perturb. par ♃, ♄, ♅	
		Coeff.	Perturb.
			$-51'',59$
$l^{VI} = 197^s,7494$	$+0,035$	$-2'',09$	$-0,07$
	$-0,999$	$-5,66$	$+5,65$
$2l^{VI} = 395,4988$	$-0,071$	$-0,79$	$+0,06$
	$+0,998$	$+2,96$	$+2,96$
$3l^{VI} = 193,2482$	$+0,106$	$+3,62$	$+0,38$
	$-0,994$	$+4,34$	$-4,31$
$4l^{VI} = 390,9976$	$-0,141$	$-0,28$	$+0,05$
	$+0,990$	$-0,16$	$-0,16$
$5l^{VI} = 188,7470$	$+0,176$	$+0,01$	0
	$-0,984$	$+0,03$	$-0,03$
		Σ. . .	$-47,06$

Les nombres inscrits dans la colonne $\frac{\sin}{\cos}$ sont les sinus et cosinus naturels des angles l^{VI}, $2l^{VI}$... ; en les multipliant par les coefficients S_1, C_1, S_2, C_2.., contenus dans la troisième colonne, on obtient les produits correspondant à $S_1 \sin l^{VI}$, $C_1 \cos l^{VI}$... placés en regard, produits dont la somme représente la valeur totale de δv.

Digitized by Google

A cette perturbation δv, on doit encore ajouter les valeurs X′ et Y′ dépendant de l'action de Saturne, et celle X″ dépendant de l'action de Neptune. Les deux premières de ces valeurs sont données respectivement par les Tables XII *bis* et XII *ter* avec x' et y' pour arguments; la dernière est fournie par la Table XIII *bis* avec x'' pour argument.

On obtient ainsi :

	Action de ♄		*Action de ♅*
	X′	Y′	X″
	— 51″,83	— 5″,40	+ 6″,59
$U_1 u$ ...	+ 0 ,29	+ 0 ,11	+ 0 ,03
$U_2 u^2$...	+ 0 ,02	— 0 ,01	0
Σ ...	— 51 ,52	— 5 ,30	+ 6 ,62

$$X' + Y' + X'' = -50'',20.$$

Ajoutant cette valeur à celle de δv que nous venons d'obtenir, on a donc

$$P_s = -1', 37'', 26.$$

Termes complémentaires

L'ensemble de ces termes est donné par une expression de la forme

$$\delta v = C_0 + S_1 \sin l^{VI} + C_1 \cos l^{VI} + \ldots$$

On en effectuera le calcul au moyen des Tables XIV, XIV *bis*, XIV *ter* et XIV *quater*, et l'on aura :

	C_0	S_1	C_1	S_2	C_2	S_3	C_3
Coeff. compl.	—2″,14	0	—0″, 03	+0″.15	—0″, 10	—0, 01	—0″, 04
Sin. cos.			—0 ,999	—0 ,07	+0 ,998	+0,106	—0 ,994
Perturb.	—2, 14	0	+0 , 03	—0 ,01	—0 , 10	0	+0 , 04

$$\delta v = -2'',18$$

Digitized by Google

En réunissant l'ensemble des divers résultats que nous venons de trouver, on obtient pour la valeur définitive de la longitude v_1

L + gr. inég.		177°,36′.18″,90
$\mathcal{E}$		52 ,24 ,15
$\mathfrak{P}_s$	—	1 ,37 ,28
Termes compl. $\mathfrak{T}$	—	2 ,18
Réduct. l'éclipt. ρ (T. XV).	+	4 ,69
Table rectific. XXV	—	0 ,73
Longitude hélioc. v_1		178 ,27 , 7 ,55

III. — Latitude héliocentrique

On a

$$s = \sin \varphi_1 \sin (v - \theta) + \delta s.$$

Des valeurs de v et θ, on déduit

$$v - \theta = 105°,2',42'',09.$$

On a d'ailleurs, Table V,

$$\varphi_1 = 0°,46',20'',33 ;$$

par conséquent

$$\log \sin \varphi_1 = 8,129659$$
$$\log \sin (v - \theta) = 9,984852$$
$$\text{compl. } \sin 1'' = 5,314437$$
$$\log \sin \varphi_1 \sin (v - \theta) \quad 3,428948$$
$$\sin \varphi_1 \sin (v - \theta) = 0°,44'.45''.03$$

Digitized by Google

Il reste à calculer δs ou la partie périodique de la latitude due aux actions des planètes Jupiter, Saturne et Neptune. Or, au moyen de la Table XVI et avec ζ, ζ', ζ'' pour arguments, on a d'abord

Pert. par	C_0	S_1	C_1	S_2	C_2	S_3	C_3
♃	0	— 0,68	— 0,17				
♄...	+ 0,38	+ 1,77	— 1,13	— 0,02	+ 0,13	0	+ 0,07
♅...	+ 0,53	+ 0,86	+ 1,90	— 1,32	+ 1,11	— 0,05	— 0,14
Σ...	+ 0,91	+ 1,95	+ 0,60	— 1,34	+ 1,24	— 0,05	— 0,07

On a ensuite

ARGUMENTS	sin cos	LATITUDE Perturb. par ♃, ♄, ♅,	
		Coeff.	Perturb.
			+ 0″,91
$l^{VI} = 197^{\circ},7494$	+ 0,035	+ 1″,95	+ 0 ,07
	— 0,999	+ 0 ,60	— 0 ,60
$2l^{VI} = 395\ ,4988$	— 0,071	— 1 ,34	+ 0 ,10
	+ 0,998	+ 1 ,24	+ 1 ,24
$3l^{VI} = 193\ ,2482$	+ 0,106	— 0 ,05	— 0 ,01
	— 0,994	— 0 ,07	+ 0 ,07
		δs....	+ 1 ,78

Ainsi la valeur complète de la latitude s est

$$s = + 0^{\circ}, 44', 46'', 81.$$

IV. — Rayon vecteur

La table XVII donne, avec l'excentricité E pour argument, les valeurs du coefficient B et celles de log B_1, log B_2... qui

Digitized by Google

entrent dans l'expression générale (*b*). En recourant aux valeurs de $L - \varpi$, $2(L - \varpi)$... obtenues précédemment, on aura donc

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= 1{,}0011050\\ &- 0{,}0464129\\ &- 0{,}0010516\\ &- 0{,}0000348\\ &- 0{,}0000013\\ &= 0{,}9536044.\end{aligned}$$

A cette valeur de $\frac{r}{a}$, on doit ajouter la somme des perturbations produites par Jupiter, Saturne et Neptune, perturbations qui sont représentées, pour chacune de ces planètes, par une expression de la forme

$$10\frac{\delta r}{a} = C_0 + S_1 \sin l^{VI} + C_1 \cos l^{VI} + \ldots$$

Les tables XVIII, XIX et XX dans lesquelles on entre avec les arguments ζ, ζ' et ζ'' respectivement, donnent, pour chacune des actions perturbatrices, les coefficients C_0, S_1, C_1... et l'on a

Pert par	C_0	S_1	C_1	S_2	C_2	S_3	C_3
♃	+ 108,6	+ 0,8	+ 2,5				
♄	+ 12,2	− 26,0	+ 62,8	− 4,0	+ 13,7	− 0,1	− 0,3
U_1u	+ 1		− 0,3				
♅	− 17,4	+ 3,8	+ 3,1	0	+ 0,3		
Σ	+ 103,5	+ 21,4	+ 68,1	− 4,0	+ 14,0	− 0,1	− 0,3

Digitized by Google

Au moyen des angles l^{VI}, $2l^{VI}$... on obtient alors

ARGUMENTS	sin cos	RAYON VECTEUR Perturb. par ♃, ♄.☿	
		Coeff.	Perturb.
			+ 103″,5
l^{VI}	+ 0,035	— 21,4	— 0,7
	— 0,999	+ 68,1	— 68,1
$2l^{VI}$	— 0,071	— 4,0	+ 0,3
	+ 0,998	+ 14,0	+ 14,0
$3l^{VI}$	+ 0,106	— 0,1	0,0
	— 0,994	— 0,3	+ 3,0
		$\frac{\delta r}{a}$ = ...	52,0

Réduisant cette valeur de $\frac{\delta r}{a}$ en parties du rayon et l'ajoutant à $\frac{r}{a}$, on a donc

$$\frac{r}{a} + \frac{\delta r}{a} = 0{,}9538565.$$

Il reste à déterminer la valeur du demi-grand axe a. Or on a, Table IX,

$$\frac{2\delta a}{a} = -19'',37 \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta a}{a} = -9{,}685.$$

Par l'application de la première des formules (c), on a donc

$$\begin{aligned}
\log const &= 1{,}2829254 \\
\log \frac{\delta a}{a} &= 0{,}9860996 - \\
\log \sin 1'' &= 4{,}6855749 \\
\log \delta a \sin 1'' &= 6{,}9545999 - \\
\delta a \sin 1'' &= - \ 0{,}000901 \\
const &= 19{,}183390 \\
a &= 19{,}182489.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

On conclut de là

$$\log a = 1{,}2829050$$

$$\log\left[\frac{r}{a} + \frac{\delta r}{a}\right] = 9{,}9794830$$

$$\text{Log rayon vect.} = 1{,}2623880.$$

Ainsi, les coordonnées héliocentriques qui fixent la position d'Uranus à l'époque que nous avons considérée, sont

$$\begin{aligned} \text{Longitude héliocent.} &= 178^\circ{,}27',\ 7'',55 \\ \text{Latitude} &= 0^\circ{,}44',46'',81 \textit{ boré.} \\ \text{Log rayon vecteur} &= 1{,}2623880 \end{aligned}$$

V. — Lieux héliocentriques de Neptune

Le calcul des positions héliocentriques de Neptune est en tout semblable à celui que nous venons de faire pour Uranus. C'est pourquoi nous nous dispenserons d'en donner ici une application.

Soient :

L, la longitude moyenne de Neptune, augmentée de ses inégalités à longues périodes (Tables I, III, V et VIII);

$\mathcal{E}$, l'équation du centre dont l'expression est

$$\mathcal{E} = E_1 \sin(L - \tilde{\omega}) + E_2 \sin 2(L - \tilde{\omega}) + E_3 \sin 3(L - \tilde{\omega})$$

(Table IX) ;

$\mathcal{P}_s$, la somme des perturbations périodiques dues à l'action de Jupiter, de Saturne et d'Uranus ; ces perturbations sont

Digitized by Google

toutes trois de la forme

$$\delta v = C_0 + S_1 \sin l^{VII} + C \cos l^{VII} + S_2 \sin 2\, l^{VII} + C_2 \cos 2\, l^{VII}$$

(Tables X, XI, XII) ;

ρ, la réduction à l'écliptique

$$\rho = -\tan g^2 \frac{\varphi_J}{2} \sin 2\,(v - \theta) = U_0 + U_1 v.$$

(Table XIII).

On aura pour calculer la longitude héliocentrique v_1

$$v_1 = L + \mathcal{E} + \varphi_s + \rho.$$

La partie elliptique du rayon vecteur a pour expression

$$\frac{r}{a} = B + B_1 \cos (L - \tilde{\omega}) + B_2 \cos 2\,(L - \tilde{\omega}).$$

Cette formule dépend, comme on voit, du demi-grand axe a. Or, on a

$$a = 30{,}05568 + \delta a \sin 1''$$

(Table VIII).

Après cela, on obtient

$$\log r = \log a + \log \left[\frac{r}{a} + \frac{\delta r}{a}\right],$$

$\frac{\delta r}{a}$ étant la perturbation totale résultant des actions de Jupiter, Saturne et Uranus (Tables XVI, XVII et XVIII).

Digitized by Google

On a enfin pour l'expression complète de la latitude s

$$\sin s = \sin \varphi_1 \sin (v - \theta) + \delta s,$$

expression dans laquelle δs représente l'ensemble des termes périodiques dus aux actions des planètes Jupiter, Saturne et Uranus (Tables XX, XXI et XXII).

Digitized by Google

APPENDICE

I

VALEURS DES CONSTANTES QUE LA THÉORIE EMPRUNTE AUX OBSERVATIONS

Nous allons donner dans ce paragraphe les valeurs définitives des éléments elliptiques des huit planètes principales, telles que Le Verrier les a déduites de la comparaison de ses théories planétaires avec les observations.

(*a*) *Moyens mouvements sidéraux des planètes en une année julienne de* $365^j,25$

Les moyens mouvements sidéraux annuels ou les valeurs de n, n'... réduites en secondes sont :

Mercure	n	=	5381016″,31
Vénus	n'	=	2106641,41
La Terre	n''	=	1295977,44
Mars	n'''	=	689050,82
Jupiter.	n^{IV}	=	109256,63
Saturne	n^{V}	=	43996,06
Uranus	n^{VI}	=	15424,87
Neptune	n^{VII}	=	7865,66

Digitized by Google

Ces moyens mouvements se déduisent des durées des révolutions sidérales observées T, T'... au moyen de la formule

$$N = 360^\circ \times \frac{365,25}{T}.$$

(*b*) ***Masses des planètes rapportées à celle du Soleil prise pour unité***

Les expressions de ces éléments sont les suivantes [1] :

Mercure	$m = \frac{1}{5310000}$
Vénus	$m' = \frac{1}{412150}$
La Terre	$m'' = \frac{1}{324439}$
Mars	$m''' = \frac{1}{2812526}$
Jupiter	$m^{\text{IV}} = \frac{1}{1050}$
Saturne	$m^{\text{V}} = \frac{1}{3529,6}$
Uranus	$m^{\text{VI}} = \frac{1}{24000}$
Neptune	$m^{\text{VII}} = \frac{1}{14400}$

(1) Ces valeurs des masses résultent des équations de condition que Le Verrier a formées dans la construction de ses Tables planétaires.

Aux valeurs de m'' et m^{VII}, on pourrait substituer les suivantes qui paraissent plus exactes :

$$m'' = \frac{1}{3093500}, \quad m^{\text{VII}} = \frac{1}{19380}.$$

Ces valeurs des masses de Mars et de Neptune, ont été déterminées directement par l'observation des élongations des satellites.

Digitized by Google

(c) *Distances moyennes des planètes au Soleil ou demi-grands axes de leurs orbites*

Soient A le demi-grand axe d'une planète, N son moyen mouvement et M sa masse. Représentons par les mêmes lettres, affectées d'un accent, les quantités analogues qui se rapportent à la Terre et posons $A' = 1$. D'après ce qu'on a vu, page 395, on aura pour déterminer le demi-grand axe A de l'orbite de la planète

$$A = \frac{N'^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{1 + M'}} \frac{\sqrt[3]{1 + M}}{N^{\frac{2}{3}}}, \qquad \log \frac{N'^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{1 + M'}} = 4.0750644.$$

C'est au moyen de cette formule et des données qui précèdent qu'on a conclu les distances moyennes suivantes des planètes au Soleil :

Mercure	a	= 0,3870987
Vénus	a'	= 0,7233322
La Terre	a''	= 1,0000000
Mars	a'''	= 1,5236913
Jupiter.	a^{IV}	= 5,202800
Saturne	a^{V}	= 9,538861
Uranus.	a^{VI}	= 19,18329
Neptune	a^{VII}	= 30,05508

(d) *Excentricités des orbites pour le midi moyen du 1er janvier* 1850

Ces éléments qui varient avec le temps sont exprimés ici

Digitized by Google

en parties du rayon ; on les déduirait des expressions de E, E'..., données dans le paragraphe (II), en multipliant les premiers membres de ces expressions par sin 1″.

Mercure	e	= 0,2056048
Vénus	e'	= 0,0068433
La Terre	e''	= 0,0167701
Mars	e'''	= 0,0932611
Jupiter.	e^{IV}	= 0,0482519
Saturne	e^{V}	= 0,0560713
Uranus.	e^{VI}	= 0,0463402
Neptune	e^{VII}	= 0,0089446

(*e*) *Longitudes des périhélies et des nœuds ascendants Inclinaisons*

Ces éléments varient comme les précédents avec le temps. En voici les expressions rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyen du 1er janvier 1850.

	ϖ, ϖ'...	θ, θ'...	φ, φ'...
Mercure. .	75°, 7′,13″,93	46°,33′, 8″,75	7°, 0′, 7″,71
Vénus. . .	129 ,27 ,14 , 5	75 ,19 ,52 , 3	3 ,23 ,34 ,83
La Terre .	100 ,21 ,21 , 5	0 , 0 , 0	0 , 0 , 0
Mars . . .	333 ,17 ,53 ,67	48 ,23 ,53 , 1	1 ,51 , 2 ,28
Jupiter . .	11 ,54 ,58 ,41	98 ,56 ,17 , 0	1 ,18 ,41 ,37
Saturne . .	90 , 6 ,56 ,74	112 ,20 ,53 , 0	2 ,29 ,39 ,80
Uranus . .	170 ,50 , 7 , 1	73 ,13 ,54 , 4	0 ,46 ,19 ,72
Neptune. .	45 ,59 ,43 , 1	130 , 6 ,25 ,06	1 ,47 , 2 ,13

Digitized by Google

(*f*) *Longitudes moyennes au 1er janvier 1850 à midi moyen ou valeurs de* $\varepsilon, \varepsilon'$...

On a

Mercure.	ε	$= 237^\circ,15',20'',43$
Vénus	ε'	$= 245\ ,33\ ,14\ ,70$
La Terre	ε''	$= 100\ ,46\ ,43\ ,51$
Mars.	ε'''	$= 83\ ,40\ ,31\ ,33$
Jupiter	ε^{IV}	$= 160\ ,\ 1\ ,10\ ,26$
Saturne.	ε^{V}	$= 14\ ,52\ ,27\ ,81$
Uranus	ε^{VI}	$= 29\ ,17\ ,50\ ,91$
Neptune.	ε^{VII}	$= 334\ ,33\ ,28\ ,89$

(*g*) *Arguments des perturbations planétaires*

Ces arguments qui servent au calcul des perturbations périodiques sont les longitudes moyennes des diverses planètes comptées à partir de l'équinoxe moyen du 1er janvier 1850. En voici les expressions réduites en grades et telles que Le Verrier les a employées dans la construction de ses Tables planétaires.

Mercure. . . .	l	$= 363^g,6173 + 1660^g,807464t$
Vénus.	l'	$= 272\ ,8378 + 650\ ,197991t$
La Terre . . .	l''	$= 111\ ,9741 + 399\ ,993019t$
Mars.	l'''	$= 92\ ,9786 + 212\ ,670056t$
Jupiter	l^{IV}	$= 177\ ,8026 + 33\ ,7212096t$
Saturne. . . .	l^{V}	$= 16\ ,4940 + 13\ ,5790515t$
Uranus. . . .	l^{VI}	$= 31\ ,6054 + 4\ ,7610015t$
Neptune. . . .	l^{VII}	$= 372\ ,3884 + 2\ ,4298685t$

Digitized by Google

Les mouvements de ces arguments pour 1 jour et pour 365 jours sont les suivants:

β	= 4,54704	β'	= 1,78015
β''	= 1,09512	β'''	= 0,58226
β^{IV}	= 0,092324	β^{V}	= 0,037177
β^{VI}	= 0,013035	β^{VII}	= 0,006653
365β	= 59,67070	$365\beta'$	= 249,75295
$365\beta''$	= 399,71924	$365\beta'''$	= 212,52449
$365\beta^{\text{IV}}$	= 33,698129	$365\beta^{\text{V}}$	= 13,569757
$365\beta^{\text{VI}}$	= 4,757743	$365\beta^{\text{VII}}$	= 2,428205

Dans la formation des Tables de Saturne, d'Uranus et de Neptune, Le Verrier n'a point changé les longitudes moyennes l, l', l'', l''' qui se rapportent respectivement à Mercure, Vénus, la Terre et Mars ; mais il a adopté pour l^{IV}, l^{V}, l^{VI} et l^{VII} des expressions qui diffèrent un peu des précédentes. Nous avons rapporté ces expressions au § III du Chapitre I, livre II.

II

EXPRESSIONS COMPLÈTES DE l, e, $\tilde{\omega}$, θ ET φ POUR LES HUIT PLANÈTES PRINCIPALES

En désignant par L, E, Π, Φ et Θ les expressions générales de ces éléments, on a pour l'époque $1850 + t$

Digitized by Google

Mercure

$$L = 327^\circ,15',20'',43 + 5381066'',5449t + 0'',00011289t^2$$

$$E = 42409'',03 + 0'',04195t - 0'',0000009t^2$$

$$\Pi = 75^\circ,7',13'',93 + 55'',9138t + 0'',0001111t^2$$

$$\Phi = 7^\circ,0',7'',51 + 0'',06314t - 0'',0000056t^2$$

$$\Theta = 46^\circ,33',8'',75 + 42'',6430t + 0'',0000835t^2;$$

Vénus

$$L = 245^\circ,33',14'',70 + 2106691'',65043t + 0'',00011289t^2$$

$$E = 1411'',53 - 0'',11132t + 0'',0000026t^2$$

$$\Pi = 129^\circ,27',14'',5 + 49'',462t - 0'',000593t^2$$

$$\Phi = 3^\circ,23',34'',83 + 0'',04524t - 0'',00000156t^2$$

$$\Theta = 75^\circ,19',52'',3 + 32'',8899t + 0'',0001508t^2;$$

La Terre

$$L = 280^\circ,46',43'',51 + 1296027'',6784t + 0'',00011073t^2$$

$$E = 3459'',28 - 0'',08755t - 0'',00000282t^2$$

$$\Pi = 280^\circ,21',21'',5 + 61'',6995t + 0'',0001823t^2$$

$$\Phi = 0,0,0,0$$

$$\Theta = 0,0,0,0;$$

Digitized by Google

Mars

$$L = 83^\circ,40',31'',33 + 689101'',05375t + 0'',00011341t^2$$

$$E = 19236'',51 + 0'',19679t - 0'',00000252t^2$$

$$\Pi = 333^\circ,17',53'',67 + 66'',2421t + 0'',00012093t^2$$

$$\Phi = 1^\circ,51',2'',28 - 0'',02431t + 0'',00000945t^2$$

$$\Theta = 48^\circ,23',53'',1 + 27'',992t - 0'',000217t^2;$$

Jupiter

$$L = 160^\circ,1',10'',26 + 109306'',87213t + 30'',344\upsilon^2 - 0'',742\upsilon^3$$

$$E = 9952'',66 + 171'',883\upsilon - 2'',395\upsilon^2 - 0'',048\upsilon^3$$

$$\Pi = 11^\circ,54',58'',41 + 57'',90321t + 90'',490\upsilon^2 - 2'',165\upsilon^3$$

$$\Phi = 1^\circ,18',41'',37 - 0'',20520t + 0'',35\upsilon^2$$

$$\Theta = 98^\circ,56',17'',00 + 36'',36617t + 32'',85\upsilon^2 - 3'',83\upsilon^3;$$

Saturne

$$L = 14^\circ,52',28'',30 + 44046'',303210t + 0'',000116598t^2 - 0'',0000000022t^3$$

$$E = 11565'',62 - 353'',20\upsilon - 3'',485\upsilon^2 + 0'',0833\upsilon^3$$

$$\Pi = 90^\circ,6',56'',74 + 70'',41338t + 0'',00028008t^2 + 0'',000000021136t^3$$

$$\Phi = 2^\circ,29',39'',80 - 70'',01\upsilon - 1'',41\upsilon^2 + 0'',01\upsilon^3$$

$$\Theta = 112^\circ,20',53'',00 + 31'',39594t - 0'',00004796t^2 - 0'',000000021096t^3;$$

Digitized by Google

Uranus

$$L = 29^\circ,17',50'',91 + 15475'',11138t + 26'',716v^2 + 0,''0092v^3$$

$$E = 9558'',59 - 0'',05469t + 0'',00000164t^2$$

$$\Pi = 170^\circ,50',7'',1 + 53'',4582t + 0'',0000827t^2 - 0'',0000000022t^3$$

$$\Phi = 73^\circ,13',54'',4 + 18'',0570t + 0'',0004276t^2$$

$$\Theta = 0^\circ,46',19'',72 + 0'',01732t + 0'',00001412t^2;$$

Neptune

$$L = 334^\circ,33',28'',89 + 7915'',89825t + 27'',905v^2 + 0'',294v^3$$

$$E = 1849'',09 + 0''01170t$$

$$\Pi = 45^\circ,59',43'',1 + 51'',12675t + 33'',355v^2 + 0'',294v^3$$

$$\Phi = 130^\circ,6',25'',06 + 39'',56306t + 20''.87v^2 - 0'',837v^3$$

$$\Theta = 1^\circ,47',2'',13 - 0'',34570t + 1'',16v^2 - 0''‘96v^3.$$

III

VALEURS NUMÉRIQUES DES COEFFICIENTS $\mathcal{O}^{(0.1)}$, $\mathcal{O}'^{(0.1)}$, ETC.

Ces coefficients, fonctions des masses et des grands axes des orbites planétaires, sont déterminés par les formules que

Digitized by Google

nous avons fait connaître au Chapitre I, livre IV de la première partie.

On a

$$\mathfrak{V}^{(0.1)} = m'na\,\frac{1}{4}\,\mathfrak{U}, \qquad \mathfrak{V}'^{(0.1)} = -\,m'na'\,\frac{1}{2}\,\mathfrak{U}',$$

ou en remplaçant $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ par leurs valeurs données page 218,

$$\mathfrak{V}^{(0.1)} = -\,m'n\,\frac{3}{4}\,\frac{\alpha^2 b^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

$$\mathfrak{V}'^{(0.1)} = -\,m'n\,\frac{3}{2}\left\{\frac{\alpha\left[(1+\alpha^2)\,b^{(1)} + \frac{1}{2}\,\alpha b^{(0)}\right]}{(1-\alpha^2)^2}\right\}.$$

On a d'ailleurs entre les quantités $\mathfrak{V}^{(0.1)}, \mathfrak{V}'^{(0.1)}$... et celles $\mathfrak{V}^{(1.0)}, \mathfrak{V}'^{(1.0)}$..., les relations suivantes:

$$\mathfrak{V}^{(0.1)}\; m\sqrt{a} = \mathfrak{V}^{(1.0)}\; m'\sqrt{a'},$$
$$\mathfrak{V}'^{(0.1)}\; m\sqrt{a} = \mathfrak{V}'^{(1.0)}\; m'\sqrt{a'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

relations qui permettent d'obtenir les secondes quantités en fonctions des premières.

Au moyen de ces formules et des données qui précèdent, on a obtenu les expressions suivantes des coefficients $\mathfrak{V}^{(0.1)}$, $\mathfrak{V}'^{(0.1)}$..., expressions dans lesquelles les chiffres 1. 2. 3... 7 se rapportent respectivement à Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. On a multiplié ces résultats par des facteurs indéterminés $(1+\mu)$, $(1+\mu')$..., afin de les rendre applicables au cas où les valeurs actuellement admises pour les masses m, m'... viendraient ultérieurement

Digitized by Google

à changer.

$$\mathfrak{V}^{(0.1)} = (1 + \mu') \quad 2'',910335$$
$$\mathfrak{V}^{(0.2)} = (1 + \mu'') \quad 0\ ,891538$$
$$\mathfrak{V}^{(0.3)} = (1 + \mu''') \quad 0\ ,027984$$
$$\mathfrak{V}^{(0.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}}) \quad 1\ ,601114$$
$$\mathfrak{V}^{(0.5)} = (1 + \mu^{\text{V}}) \quad 0\ ,077059$$
$$\mathfrak{V}^{(0.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}}) \quad 0\ ,001852$$

$$\mathfrak{V}^{(1.0)} = (1 + \mu) \quad 0'',447992$$
$$\mathfrak{V}^{(1.2)} = (1 + \mu'') \quad 6\ ,860112$$
$$\mathfrak{V}^{(1.3)} = (1 + \mu''') \quad 0\ ,102046$$
$$\mathfrak{V}^{(1.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}}) \quad 4\ ,198404$$
$$\mathfrak{V}^{(1.5)} = (1 + \mu^{\text{V}}) \quad 0\ ,198360$$
$$\mathfrak{V}^{(1.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}}) \quad 0\ ,004740$$

$$\mathfrak{V}^{(2.0)} = (1 + \mu) \quad 0'',103506$$
$$\mathfrak{V}^{(2.1)} = (1 + \mu') \quad 5\ ,174037$$
$$\mathfrak{V}^{(2.3)} = (1 + \mu''') \quad 0\ ,298228$$
$$\mathfrak{V}^{(2.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}}) \quad 7\ ,061544$$
$$\mathfrak{V}^{(2.5)} = (1 + \mu^{\text{V}}) \quad 0\ ,325649$$
$$\mathfrak{V}^{(2.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}}) \quad 0\ ,007723$$

$$\mathfrak{V}^{(3.0)} = (1 + \mu) \quad 0'',019797$$
$$\mathfrak{V}^{(3.1)} = (1 + \mu') \quad 0\ ,468978$$
$$\mathfrak{V}^{(3.2)} = (1 + \mu'') \quad 1\ ,817218$$
$$\mathfrak{V}^{(3.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}}) \quad 14\ ,645853$$
$$\mathfrak{V}^{(3.5)} = (1 + \mu^{\text{V}}) \quad 0\ ,629736$$
$$\mathfrak{V}^{(3.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}}) \quad 0\ ,014625$$

Digitized by Google

$\mathcal{V}^{(4.0)} = (1 + \mu)$ 0″,000240
$\mathcal{V}^{(4.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,004091
$\mathcal{V}^{(4.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,009123
$\mathcal{V}^{(4.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,003105
$\mathcal{V}^{(4.5)} = (1 + \mu^{\text{v}})$ 7 ,367279
$\mathcal{V}^{(4.6)} = (1 + \mu^{\text{vi}})$ 0 .105202
$\mathcal{V}^{(4.7)} = (1 + \mu^{\text{vii}})$ 0 ,031282

$\mathcal{V}^{(5.0)} = (1 + \mu)$ 0″,000029
$\mathcal{V}^{(5.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,000477
$\mathcal{V}^{(5.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,001039
$\mathcal{V}^{(5.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,000330
$\mathcal{V}^{(5.4)} = (1 + \mu^{\text{iv}})$ 18 ,196879
$\mathcal{V}^{(5.6)} = (1 + \mu^{\text{vi}})$ 0 ,386656
$\mathcal{V}^{(5.7)} = (1 + \mu^{\text{vii}})$ 0 ,089591

$\mathcal{V}^{(6.0)} = (1 + \mu)$ 0″,000002
$\mathcal{V}^{(6.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,000041
$\mathcal{V}^{(6.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,000089
$\mathcal{V}^{(6.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,000028
$\mathcal{V}^{(6.4)} = (1 + \mu^{\text{iv}})$ 0 ,934785
$\mathcal{V}^{(6.5)} = (1 + \mu^{\text{v}})$ 1 ,390990
$\mathcal{V}^{(6.7)} = (1 + \mu^{\text{vii}})$ 0 ,564571

$\mathcal{V}^{(7.4)} = (1 + \mu^{\text{iv}})$ 0″,178628
$\mathcal{V}^{(7.5)} = (1 + \mu^{\text{v}})$ 0 ,207033
$\mathcal{V}^{(7.6)} = (1 + \mu^{\text{vi}})$ 0 ,362587

$\mathcal{V}'^{(0.1)} = (1 + \mu')$ 1″,870086
$\mathcal{V}'^{(0.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,422908
$\mathcal{V}'^{(0.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,008814
$\mathcal{V}'^{(0.4)} = (1 + \mu^{\text{iv}})$ 0 ,148711
$\mathcal{V}'^{(0.5)} = (1 + \mu^{\text{v}})$ 0 ,003908
$\mathcal{V}'^{(0.6)} = (1 + \mu^{\text{vi}})$ 0 ,000045

Digitized by Google

$\mathfrak{V}'^{(1.0)} = (1 + \mu)$ 0″,287865

$\mathfrak{V}'^{(1.2)} = (1 + \mu'')$ 5 ,711900

$\mathfrak{V}'^{(1.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,058717

$\mathfrak{V}'^{(1.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}})$ 0 ,728088

$\mathfrak{V}'^{(1.5)} = (1 + \mu^{\text{V}})$ 0 ,018788

$\mathfrak{V}'^{(1.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}})$ 0 ,000224

$\mathfrak{V}'^{(2.0)} = (1 + \mu)$ 0″,049099

$\mathfrak{V}'^{(2.1)} = (1 + \mu')$ 4 ,308033

$\mathfrak{V}'^{(2.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,229326

$\mathfrak{V}'^{(2.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}})$ 1 ,689087

$\mathfrak{V}'^{(2.5)} = (1 + \mu^{\text{V}})$ 0 ,042580

$\mathfrak{V}'^{(2.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}})$ 0 ,000504

$\mathfrak{V}'^{(3.0)} = (1 + \mu)$ 0″,006235

$\mathfrak{V}'^{(3.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,269851

$\mathfrak{V}'^{(3.2)} = (1 + \mu'')$ 1 ,397369

$\mathfrak{V}'^{(3.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}})$ 5 ,304038

$\mathfrak{V}'^{(3.5)} = (1 + \mu^{\text{V}})$ 0 ,125346

$\mathfrak{V}'^{(3.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}})$ 0 ,001451

$\mathfrak{V}'^{(4.0)} = (1 + \mu)$ 0″,000022

$\mathfrak{V}'^{(4.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,000709

$\mathfrak{V}'^{(4.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,002182

$\mathfrak{V}'^{(4.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,001125

$\mathfrak{V}'^{(4.5)} = (1 + \mu^{\text{V}})$ 4 ,815454

$\mathfrak{V}'^{(4.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}})$ 0 ,035319

$\mathfrak{V}'^{(4.7)} = (1 + \mu^{\text{VII}})$ 0 ,006747

Digitized by Google

$\mho'^{(5.0)} = (1 + \mu)$ 0 ,000001
$\mho'^{(5.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,000045
$\mho'^{(5.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,000136
$\mho'^{(5.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,000066
$\mho'^{(5.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}})$ 11 ,893979
$\mho'^{(5.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}})$ 0 ,232241
$\mho'^{(5.7)} = (1 + \mu^{\text{VII}})$ 0 ,035101

$\mho'^{(6.0)} = (1 + \mu)$ 0″,000000
$\mho'^{(6.1)} = (1 + \mu')$ 0 ,000002
$\mho'^{(6.2)} = (1 + \mu'')$ 0 ,000006
$\mho'^{(6.3)} = (1 + \mu''')$ 0 ,000003
$\mho'^{(6.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}})$ 0 ,313829
$\mho'^{(6.5)} = (1 + \mu^{\text{V}})$ 0 ,835482
$\mho'^{(6.7)} = (1 + \mu^{\text{VII}})$ 0 ,424190

$\mho'^{(7.4)} = (1 + \mu^{\text{IV}})$ 0″,038531
$\mho'^{(7.5)} = (1 + \mu^{\text{V}})$ 0 ,081115
$\mho'^{(7.6)} = (1 + \mu^{\text{VI}})$ 0 ,272429.

FIN

Digitized by Google

ERRATA

Pag.	*Lig.*	*au lieu de*	*Lisez :*
1	5.....	procession	précession
2	2 en rem.	... elle se porterait	... celles-ci se porteraient ...
»	17.....	d'un corps à un autre	d'un corps vers un autre ...
3	2 en rem.	de la Lune	de la Terre
5	9.....	... et s'ils tombent c'est que d'autres corps etc.	...; lorsqu'ils tombent d'autres corps etc.
26	15.....	et celles ...	et à celles ...
60	Form. (13)	$v = \ldots.$	$r = \ldots.$
85	1 en rem.	$G^2 - \frac{K^2}{\cos^2\varphi}$	$G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}$
185	3 en rem.	$Ke^{\lambda}e^{\lambda'}\eta^{2\lambda'}\cos(\ldots.)$	$Ke^{\lambda'}e^{\lambda'}\eta^{2\lambda'}\cos(\ldots.)$
218	9.....	$\ldots\left\{3\alpha(1+\alpha^2)b^{(1)}+\frac{1}{2}\alpha b^{(0)}\right\}\ldots$	$\ldots\left\{3\alpha\left[(1+\alpha^2)b^{(1)}+\frac{1}{2}\alpha b^{(0)}\right]\right\}$
230	7 en rem.	$\mathfrak{V}'^{(0,1)} = -m'na\frac{1}{2}\mathfrak{U}'$	$\mathfrak{V}'^{(0,1)} = -m'na'\frac{1}{2}\mathfrak{U}'$
290	§ 1.....	termes d'ordres supérieurs	termes d'ordre supérieur
390	Form. (3)	$\chi = \left\{\frac{\mathfrak{N}_1}{\sigma^2} + \cdots\right.$	$\chi = \left\{\frac{\mathfrak{N}_1}{\sigma} + \cdots\right.$
446	6.....	log. $\cos u = 9{,}5799944 -$	log. $\cos u = 9{,}5799244 -$
»	7.....	$\log(-aE\sin 1''\cos u)$ $= 8{,}9867366 -$	$\log(-aE\sin 1''\cos u)$ $= 8{,}9867356 -$

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

Pages

PRÉFACE. VII

INTRODUCTION HISTORIQUE

PREMIÈRE SECTION

Découverte de la gravitation universelle

I. — Opinions des anciens astronomes et des philosophes sur la pesanteur universelle. 1
II. — Recherches de Newton. — Apparition du Livre des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* 5
III. — Travaux de Robert Hooke, de Kepler, de Halley et de Borelli. 10
IV. — Question de priorité soulevée par Hooke à l'apparition du Livre des *Principes*. — Réponse de Newton à Halley . . . 16

SECONDE SECTION

Analyse du problème fondamental des perturbations

I. — Recherches de Newton, de d'Alembert et d'Euler sur le *Problème des trois corps*. 20
II. — Recherches de Clairaut et de Lagrange sur le même sujet. . 23
III. — Transformation de Jacobi. 27
IV. — Réduction des équations du mouvement à la forme canonique. Travaux de J. Bertrand, de Bour, de Brioschi, etc. . . . 30
V. — Cas particuliers du Problème des trois corps. — Travaux de Lagrange et de Laplace. — Remarque de J. Liouville sur la stabilité du système formé par la seconde solution. . . 33

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE

Exposition du calcul des perturbations

LIVRE I

Théorie du mouvement elliptique. -- Première approximation du mouvement héliocentrique des planètes

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT HÉLIOCENTRIQUE DES PLANÈTES

Pages

I. — Des éléments qui constituent une inégalité. — Définition du *coefficient*, de l'*argument* et de la *période*. 37
II. — Du problème des perturbations planétaires. — Simplification que la disposition particulière de notre système introduit dans la solution de ce problème 39
III. — Équations qui définissent le mouvement des planètes autour du Soleil, abstraction faite de leur figure. 42
IV. — Intégrales fournies par les équations précédentes 45
V. — Réduction du problème du n corps à celui du mouvement de $n - 1$ corps fictifs. — Substitution linéaire de Jacobi . . 49

CHAPITRE II

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN SUPPOSANT NULLES LES FORCES PERTURBATRICES

I. — Du mouvement elliptique des planètes 54
II. — Forme de l'orbite décrite 57
III. — Conditions qui déterminent l'espèce de la section conique. — Loi du mouvement 60
IV. — Détermination des constantes que l'intégration introduit dans les formules du mouvement elliptique. 66
V. — Propriété du mouvement héliocentrique et en particulier du mouvement dans l'ellipse. — Théorème de Lambert . . 68
VI. — Du mouvement héliocentrique dans une orbite très excentrique. — Théorème d'Euler 72

CHAPITRE III

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT PAR LA MÉTHODE D'HAMILTON ET DE JACOBI

I. — Principes fondamentaux. 75
II. — Réduction des équations du mouvement elliptique à la *forme canonique* et intégration de ces équations. 78

Digitized by Google

Pages

III. — Interprétation des constantes canoniques 83
IV. — Relations qui lient les constantes canoniques aux éléments elliptiques 88

CHAPITRE IV

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES COORDONNÉES QUI FIXENT LA POSITION D'UNE PLANÈTE DANS SON ORBITE ELLIPTIQUE

I. — Expression des coordonnées polaires r et v en fonction du temps. 90
II. — Autre forme du développement de r et de v. 99

LIVRE II

Seconde approximation du mouvement héliocentrique des planètes
Théorie du mouvement troublé

CHAPITRE I

MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT TROUBLÉ

I. — Considérations préliminaires. — Divers ordres d'approximation par rapport aux masses. 105
II. — Principe sur lequel repose la méthode de la variation des constantes arbitraires. 107
III. — Propriété dont jouissent les coefficients de la forme (a, b) . 112
IV. — Remarque sur le calcul des coefficients de la forme (a, b) . 116
V. — Cas où l'une des deux arbitraires qui entre dans le coefficient (a, b) est une fonction de fonctions 117
V. — Variations différentielles des constantes arbitraires de l'origine du temps 119

CHAPITRE II

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT TROUBLÉ

I. — Exposition du calcul complet des quinze coefficients $(a. b)$. — Valeurs de quelques combinaisons fondamentales. — Valeurs générales des combinaisons de l et de ω, avec une constante quelconque χ. — Détermination des quinze coefficients (I). 124
II. — Variations différentielles des six constantes arbitraires qui entrent dans les formules du mouvement elliptique. — Remarque sur la manière d'exprimer l'anomalie moyenne dans le mouvement troublé. 137

Digitized by Google

Pages

III. — Transformation des expressions de $d\varepsilon$, de, $d\theta$ et $d\varphi$ dans le cas où l'excentricité des orbites et leur inclinaison sur un plan fixe sont de très petites quantités 145

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE JACOBI A LA DÉTERMINATION DES VARIATIONS DES ÉLÉMENTS ELLIPTIQUES

I. — Variations différentielles des constantes arbitraires sous la *forme canonique* 148

II. — Transformation du système $(\mathfrak{B})$ dans le cas du mouvement troublé de la Lune. 152

III. — Changement d'arbitraires 155

LIVRE III

Développement en série de la fonction des forces perturbatrices

CHAPITRE I

EXPRESSION DE LA FONCTION PERTURBATRICE DANS LE CAS D'ORBITES PEU INCLINÉES ET D'UNE FAIBLE EXCENTRICITÉ

I. — De la fonction perturbatrice et de sa nature. 161

II. — Forme générale du développement de R dans le cas des planètes 163

III. — Développement de l'expression précédente en série ordonnée suivant les puissances des excentricités. — Termes qui sont du premier ordre par rapport aux excentricités. — Termes qui dépendent de la seconde puissance des excentricités. . 166

IV. — Expression analytique des termes qui dépendent des inclinaisons 179

V. — Remarques sur la forme du développement de R 182

CHAPITRE II

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS QUI ENTRENT DANS LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE

I. — Développement en série trigonométrique de la fonction $\Theta^{-\mu}$. 186

II. — Relations qui existent entre les termes consécutifs des développements de $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu}$ et de $(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-\mu-1}$ 190

III. — Calcul des dérivées de $\mathfrak{A}^{(i)}$ par rapport à α 193

IV. — Relations qui lient les coefficients $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{B}^{(i)}$, $\mathfrak{C}^{(i)}$... et leurs dérivées successives à ceux $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$... respectivement . 198

Digitized by Google

CHAPITRE III

EXPRESSION DES COEFFICIENTS DES DIVERS TERMES QUI ENTRENT DANS LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE AU MOYEN D'INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES.

Pages

I. — Représentation des coefficients $\mathfrak{A}^{(i)}$ et $\mathfrak{B}^{(i)}$ à l'aide d'intégrales définies. 201
II. — Expression des coefficients $b^{(0)}$ et $b^{(1)}$ à l'aide des *transcendantes elliptiques*. 205
III. — Expression des coefficients du développement de la fonction R au moyen d'intégrales définies doubles. 208

LIVRE IV

Perturbations du premier ordre par rapport aux masses. — Théorie des inégalités séculaires et des inégalités périodiques

CHAPITRE I

THÉORIE DES INÉGALITÉS SÉCULAIRES

I. — Distinction des termes périodiques et des termes séculaires. — Leur origine. 212
II. — Expression de la partie non périodique de R. 215
III. — Variations séculaires des éléments des orbites planétaires. . 220
IV. — Invariabilité de la fonction $\mathfrak{N}$. 224
V. — Valeurs de de, $d\tilde{\omega}$, $d\varphi$, $d\theta$... ordonnées suivant les puissances du temps. — Variations annuelles. 227
VI. — Relations qui existent entre les fonctions $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ et leurs analogues 229
VII. — Variations des inclinaisons et des nœuds des orbites planétaires par rapport à l'orbite mobile de la Terre. . . . 231

CHAPITRE II

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI DÉTERMINENT LES VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS DES ORBITES PLANÉTAIRES

I. — Réduction des équations différentielles à la forme linéaire. 233
II. — Intégration du système relatif aux excentricités et aux longitudes des périhélies. 236
III. — Intégration du système relatif aux inclinaisons et aux longitudes des nœuds. 239
IV. — Remarque sur le calcul numérique des intégrales précédentes. 240
V. — Intégration de l'expression différentielle de la variation séculaire de l'époque. 243

Digitized by Google

CHAPITRE III

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA FORME DES INTÉGRALES PRÉCÉDENTES. — CONSÉQUENCES QUI EN RÉSULTENT RELATIVEMENT A LA STABILITÉ DU SYSTÈME DU MONDE.

Pages

I. — Nature des racines de l'équation en g. — Première condition relative à la stabilité du système du monde. 246
II. — Ordre de grandeur des quantités N, N_1, N_2... — Seconde condition nécessaire à la stabilité du système planétaire. . 253
III. — Déplacements séculaires des périhélies et des nœuds. . . 254

CHAPITRE IV

THÉORIE DES INÉGALITÉS PÉRIODIQUES

I. — Développement des formules qui expriment les variations différentielles des éléments de l'orbite elliptique. . . . 256
II. — Variations finies des éléments des orbites planétaires. . . 262
III. — Variations périodiques et totales des coordonnées héliocentriques 265

CHAPITRE V

THÉORIE DES INÉGALITÉS A LONGUES PÉRIODES

I. — Commensurabilité des moyens mouvements. 270
II. — Réduction des termes d'une inégalité à longue période relative à un argument déterminé. 272
III. — Transformation des angles φ et θ. 273
IV. — Relation qui lie entre elles les inégalités à longues périodes de deux planètes m et m' soumises à leur action mutuelle. 276

CHAPITRE VI

EXEMPLE DU CALCUL NUMÉRIQUE D'UNE INÉGALITÉ A LONGUE PÉRIODE

I. — Première opération. — Développement de la fonction R. . 280
II. — Deuxième opération. — Calcul des quantités $b^{(i)}$, $e^{(i)}$, $c^{(i)}$ et de leurs dérivées. 284
III. — Troisième opération. — Calcul de τ et de γ. — Évaluation numérique des coefficients $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{A}$. 286

Digitized by Google

LIVRE V

Approximation des ordres supérieurs. — Perturbations du second ordre par rapport aux masses

CHAPITRE PREMIER

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION R ORDONNÉE SUIVANT LES PUISSANCES DES MASSES

Pages

I. — Expression analytique des termes d'ordre supérieur par rapport aux forces perturbatrices. — Termes du deuxième ordre par rapport aux masses. — Termes du troisième ordre par rapport aux masses. — Termes du quatrième ordre par rapport aux masses 290

II. — Autre forme du développement de R ordonnée suivant les puissances des masses. — Termes du deuxième ordre. — Termes du troisième ordre 292

III. — Variations finies des éléments de l'orbite elliptique en ayant égard au carré des forces perturbatrices. 294

CHAPITRE II

DE LA GRANDE INÉGALITÉ DE JUPITER ET DE SATURNE. — DÉTERMINATION DES TERMES DE LA GRANDE INÉGALITÉ QUI SONT DU SECOND ORDRE PAR RAPPORT AUX MASSES.

I. — Combinaisons des divers arguments dans lesquels peut se décomposer l'angle $5n' - 2n$. 297

II. — Expressions analytiques des valeurs $\delta\rho$ et $\delta\rho'$ qui résultent de la combinaison par voie d'addition des arguments βt et $\beta' t$. — Combinaison inverse de la précédente — Calcul des seconds termes des valeurs de $\delta\rho$ et de $\delta\rho'$. 299

III. — Des inégalités du second ordre qui dépendent du double de l'argument de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne. 305

CHAPITRE III

DÉVELOPPEMENT DES INÉGALITÉS DU SECOND ORDRE PAR LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES

I. — Transformation des valeurs de $\delta a, \delta e \ldots \delta q$. 307

II. — Application des formules précédentes au calcul des termes du second ordre de l'inégalité $\delta\rho$. 309

III. — Calcul de $\delta\rho'$. 314

Digitized by Google

CHAPITRE IV

DES CONDITIONS QUI ASSURENT LA STABILITÉ DU SYSTÈME DU MONDE

Pages

I. — Invariabilité des grands axes des orbites planétaires en ayant égard au carré des forces perturbatrices. 317
II. — Limites des variations séculaires des excentricités et des inclinaisons, en ayant égard au carré de la force perturbatrice et à toutes les puissances de ces quantités. 324
III. — Du plan invariable du système du monde. — Formules qui déterminent sa position. 328
IV. — Des inégalités que la non-sphéricité du Soleil introduit dans le mouvement des planètes. 329

LIVRE VI

Introduction à la théorie de la Lune. — Analyse mathématique du Problème des trois corps

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DE LA LUNE DE NEWTON

I. — Détermination théorique des principales inégalités du mouvement de la Lune. 334
II. — Des petites inégalités que Newton a mentionnées dans le *scholie* qui termine sa théorie de la Lune. 339

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE DANS LE CAS DU MOUVEMENT TROUBLÉ DE LA LUNE. — MÉTHODE DE DELAUNAY

I. — Forme générale de ce développement. 344
II. — Développement de la fonction perturbatrice en série ordonnée par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle des orbites de la Lune et du Soleil. 349
III. — Ordre des différents termes qui entrent dans l'expression de la fonction perturbatrice. 352
IV. — Expression des coordonnées de la Lune en fonction du temps. 353

CHAPITRE III

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

I. — Solution générale de Lagrange. 357
II. — Analyse des cas où le Problème des trois corps admet une solution rigoureuse 363

Digitized by Google

SECONDE PARTIE

Application des principes qui précèdent à l'explication et à la formation des Tables du mouvement des Planètes

LIVRE I

Parties séculaires et parties périodiques des éléments des orbites

CHAPITRE PREMIER

VALEURS PROVISOIRES ET VALEURS CORRIGÉES DES ÉLÉMENTS

Pages

I. — Considérations générales. — Valeurs provisoires des éléments. 369
II. — Déplacements séculaires de l'elliptique et de l'équateur. — Formules de réduction. 371
III. — Application des formules précédentes. — Calcul de l'angle $\theta''_1 - \theta_1$. — Détermination des angles θ_1, NN' et φ_1. . . 374
IV. — Variations séculaires corrigées des éléments de l'orbite. — Réduction des angles φ, θ et ϖ à l'écliptique et à l'équinoxe mobiles 378

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES PUISSANCES DU TEMPS DE LA PARTIE SÉCULAIRE DES ÉLÉMENTS

I. — Représentation des valeurs de e, ϖ, φ et ϑ à l'aide d'une fonction dépendante du temps et pour une période de 500 ans. 381
II. — Partie séculaire de la longitude moyenne L. 383

CHAPITRE III

RÉDUCTION A LA FORME TUBULAIRE DE LA PARTIE PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

I. — Introduction des termes d'ordre supérieur dans les approximations. — Nature de ces termes. 386
II. — Intégrales développées en séries des équations différentielles (A). 388
III. — Parties périodiques de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du périhélie. 391
IV. — Inégalités périodiques du demi-grand axe. 393

Digitized by Google

CHAPITRE IV

MÉTHODE SUIVIE PAR LE VERRIER DANS LA DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS DES COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES

Pages

I. — Perturbations de la longitude vraie et du rayon vecteur. . 397
II. — Perturbations de la latitude. 399
III. — Perturbations de la longitude projetée v_1. 401

CHAPITRE V

FORMATION DES TABLES DÉFINITIVES DU MOUVEMENT DES PLANÈTES. — COMPARAISON DE LA THÉORIE AVEC LES OBSERVATIONS

I. — Équations de condition en longitude et en latitude. . . 403
II. — Résolution des équations de condition. — Principe de la méthode des moindres carrés. 406

LIVRE II

Construction des Tables du mouvement de Jupiter

CHAPITRE PREMIER

DISPOSITION GÉNÉRALE DES TABLES PLANÉTAIRES

I. — Tables à simple et à double entrée. 411
II. — Arguments des perturbations planétaires. 412
III. — Remarque sur les arguments des inégalités donnés dans les Tables générales de Jupiter 415
IV. — Conversion des grades en degrés, et réciproquement . . . 416
V. — Conversion en secondes sexagésimales des arcs exprimés en parties du rayon, et réciproquement 417

CHAPITRE II

CONSTRUCTION DES TABLES CONCERNANT LA LONGITUDE VRAIE

I. — Réduction en Tables des parties séculaires. — Construction de la Table des époques (Tables I, II, III et IV de Jupiter). Table des variations séculaires (Table V de Jupiter) . . . 419
II. — Réduction en Tables des parties périodiques. — Construction des Tables VI, VII, VIII et IX de Jupiter (Inégalités à longues périodes dépendant des arguments V, 2V et W). — Construction de la Table X de Jupiter (Perturbations périodiques dues à l'action de Saturne). — Construction des Tables XIII, XIV et XV de Jupiter (Perturbations périodiques dues aux actions des planètes Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune. — Table XVI (Réduction à l'écliptique) . . 423

Digitized by Google

CHAPITRE III

TABLES CONCERNANT LA LATITUDE ET LE RAYON VECTEUR

Pages

I. — Parties séculaires de la longitude du nœud ascendant et de l'inclinaison. 432
II. — Partie périodique de la latitude due à l'action de Saturne. — Construction de la Table XX de Jupiter 434
III. — Tables concernant le rayon vecteur. — Tables XVII et XVIII de Jupiter 436

LIVRE III

Application des Tables au calcul des positions héliocentriques des Planètes

CHAPITRE PREMIER

CALCUL DES POSITIONS HÉLIOCENTRIQUES DE JUPITER ET DE SATURNE

I. — Tableau des arguments 438
II. — Calcul des valeurs complètes de L, ϖ, θ et δa 439
III. — Coordonnées héliocentriques de la planète. — Calcul de la partie périodique δs de la latitude. — Calcul des corrections δv et δr. — Calcul de l'anomalie excentrique. — Calcul de la longitude vraie v. — Calcul de la réduction à l'écliptique ρ. — Calcul du rayon recteur. — Calcul de la latitude héliocentrique 442

CHAPITRE II

LIEUX HÉLIOCENTRIQUES DES PLANÈTES DONT LES ORBITES SONT INTÉRIEURES A CELLE DE JUPITER

I. — *Première application.* — Calcul des lieux héliocentriques de Mercure. — Arguments des inégalités. — Calcul de l'équation du centre. — Inégalités de la longitude. — Calcul de P_0. — Calcul de la réduction à l'écliptique. — Calcul de la latitude. — Calcul du rayon vecteur 448
II. — *Seconde application.* — Calcul des lieux héliocentriques de Vénus. — Arguments simples. — Arguments composés. — Sommes P_0, P_s et P_r des perturbations périodiques de la longitude, de la latitude et du rayon vecteur. — Calcul de la longitude héliocentrique v_1 de la latitude et du rayon vecteur 454

Digitized by Google

Pages

III. — *Troisième application.* — Calcul des lieux héliocentriques de Mars. — Arguments des perturbations. — Sommes P_0 et P_r des inégalités de la longitude et du rayon vecteur. — Somme P_s des perturbations de la latitude. — Longitude héliocentrique. — Calcul de l'équation du centre. — Réduction à l'écliptique. — Calcul de la latitude héliocentrique et du rayon vecteur 457

CHAPITRE III

CALCUL DES POSITIONS HÉLIOCENTRIQUES D'URANUS ET DE NEPTUNE

I. — Lieux héliocentrique d'Uranus. — Formules générales. . . 463

II. — Longitude héliocentrique. — Tableau des arguments. — Inégalités à longues périodes de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du périhélie. — Calcul de l'équation du centre. — Perturbations périodiques de la longitude vraie. — Termes complémentaires 465

III. — Latitude héliocentrique. — Calcul de la partie périodique de la latitude due aux actions des planètes Jupiter, Saturne et Neptune 471

IV. — Rayon vecteur. — Calcul des perturbations produites par Jupiter, Saturne et Neptune. — Détermination du demi-grand axe 472

V. — Lieux héliocentriques de Neptune. — Formules générales . 475

APPENDICE

I. — VALEUR DES CONSTANTES QUE LA THÉORIE EMPRUNTE AUX OBSERVATIONS

(*a*) Moyens mouvements sidéraux des planètes en une année julienne de 365j,25. 478

(*b*) Masses des planètes rapportées à celle du Soleil prise pour unité. 479

(*c*) Distances moyennes des planètes au Soleil ou demi-grand axe de leurs orbites 480

(*d*) Excentricités des orbites pour le midi moyen du 1er janvier 1850.

(*e*) Longitudes des périhélies et des nœuds ascendants. — Inclinaisons 481

(*f*) Longitudes moyennes au 1er janvier 1850, à midi moyen, ou valeurs de ε, ε'. 482

(*g*) Arguments des perturbations planétaires 482

II. — Expressions complètes de l, e, ϖ, θ et φ pour les huit planètes principales 483

III. — Valeurs numériques des coefficients $\mathcal{V}^{(0.1)}$, $\mathcal{V}'^{(0.1)}$, etc . 486

Tours. — Imprimerie DESLIS FRÈRES

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06942 5976

Digitized by Google

Digitized by Google